Arbeidsrapport nr. 148

Leif Bjørn Skorpen

Matematikk i musikken – musikk i matematikken

Høgskulen i Volda   Møreforsking Volda

2003

Forfattar	Leif Bjørn Skorpen
Ansvarleg utgjevar	Høgskulen i Volda
ISBN	82-7661-190-7 (elektronisk versjon)
	82-7661-189-3 (trykt versjon)
ISSN	0805-6609
Sats	Leif Bjørn Skorpen
Distribusjon	http://www.hivolda.no/fou

Om arbeidsrapportserien:
Arbeidsrapporten er faglege og vitskaplege arbeid som ikkje fullt ut stettar krava til forskingsrapportar. Det kan vere delrapportar innanfor større prosjekt, eller lærermateriell knytt til undervisningsføremål. Arbeidsrapportane skal vere godkjende av anten dekanus, gruppeleiar, prosjektleiar (for IAaI: instituttleiar) eller ein annan fagperson dei har utpeika og forskingskoordinator ved HVO/MFV. Kvalitetssikringa skal utførast av ein annan enn forfattar.

Forord

Grunnlaget for dette arbeidet vart lagt gjennom ein samtale med ein kollega på eit personalseminar for nokre år sidan. Samtalen dreia seg om eigenskapar ved instrument, om klangen i instrument og om stemming av instrument. Eg vart inspirert, og fekk straks lyst til å finne ut meir om desse emna. Etterkvart som eg arbeidde meg inn i det musikkteoretiske stoffet, vart det tverrfaglege aspektet mellom matematikk og musikk stadig meir framtredande for meg.
Eg har opplevd arbeidet med dette stoffet som svært spanande og gjevande, og vonar at studentar og lærarar på ulike nivå innanfor utdanningssystemet, og andre med interesse for matematikk og musikk, også kan ha glede av å lese det. Kanskje kan det brukast som bakgrunnsmateriale og gje inspirasjon til tverrfaglege arbeid mellom desse to faga.

Ei stor takk til Bård Dahle som gav meg inspirasjon til å starte arbeidet, og som skaffa relevant litteratur i oppstartsfasen. Takk til Frode Rønning som gav respons på eit tidleg utkast til manuskript. Ei stor takk også til Erik Fooladi som har hjelpt meg med å overføre utrekningane mine for dei ulike skalatypane til lydfiler ved hjelp av programmet ”Csound” (http://csound.com).

Volda, 10 desember 2003

Leif Bjørn Skorpen

Innhaldsliste

Innleiing

I undervisningssamanheng står det tverrfaglege aspektet sentralt i utdanningssystemet på alle nivå, frå barnehage til lærarutdanningane på høgskulenivå. I dette arbeidet prøver eg å peike på nokre av dei nære samanhengane ein kan finne mellom matematikk og musikk. Eg har vald å gå nærare inn på skalastudium som eitt av mange område av musikken der matematikken står sentralt. Her vil eg sjå på den matematiske oppbygginga av tre ulike skalatypar, og samanlikne desse både numerisk og auditivt. For å gjere den auditive samanlikninga lett tilgjengeleg for lesarane har eg fått utvikla nokre lydfiler som lett kan spelast av.

Det vil kunne oppstå markerte nivåforskjellar mellom musikkteorien og den matematikken som inngår i dette arbeidet. Det er i hovudsak grunnleggjande musikkteori som vert brukt, medan det matematiske nivået gjerne spenner over eit større spekter frå enkel brøkrekning, som ein finn på mellomtrinnet i grunnskulen, til potens- og logaritmerekning, som er mest aktuelt på vidaregåande skule eller høgskulenivå. Slik utdanningssystemet er bygd opp i dag, er det ikkje gitt at ein vilkårleg lesar kjenner begge desse faga på eit høveleg nivå. Ein musikar vil gjerne møte på ein del ny og ukjend matematikk, medan det for ein matematikar gjerne vil vere ein del ukjend musikkteori i dette arbeidet. Mitt utgangspunkt som matematikar og hobbymusikar har vore å identifisere matematikken i denne delen av musikkteorien og samtidig kunne lytte til ”musikken i matematikken” både direkte og i overført tyding.

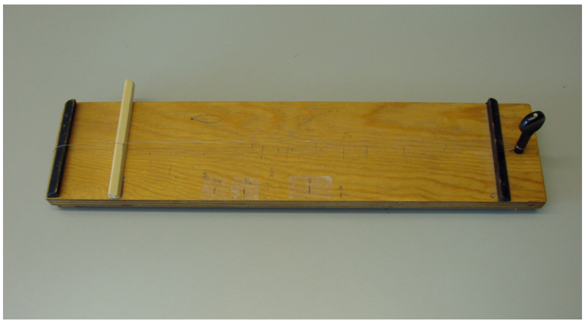
Kva er musikk?

Musikk kan definerast på ulike måtar. Ein definisjon eg har høyrd og som eg likar godt er: ”Musikk = Matematikk + Følelse”. Ikkje slik å forstå at det ikkje er kjensler knytt til matematikken. Alle som har eit forhold til matematikkfaget i skuleverket veit at det ofte kan vere sterke kjensler knytt til matematikkfaget, både positive og negative. Tradisjonelt har den estetiske sida, og dermed også den kjenslemessige sida, ved musikken vore meir verdsett og vektlagt enn tilsvarande sider ved matematikken.
I denne omgang skal me legge hovudvekta på matematikkdelen av musikken – og då spesielt på tal. Komponist, musikkteoretikar og instrumentbyggjar Harry Partch definerer musikk slik: ”Eit system av musikk er ei organisering av tonar i forhold til kvarandre, og desse forholda er uunngåeleg forhold mellom tal” (mi omsetjing av Partch (1974: 76)). Han går så langt som til å droppe dei tradisjonelle notenamna C, D, E osv. Med utgangpunkt i ein (tilfeldig) vald basistone, kan alle andre tonar gjevast namn i form av forholdstal, ut frå kva forhold dei har til denne basistonen. Når ein uttrykkjer tonar og intervall mellom tonar ved hjelp av forholdstal, skal me seinare sjå at det er ein nær samanheng mellom dei seks første heile tala og musikalsk konsonans[1].

Bruk av forholdstal

I utgangspunktet kan ein velje to ulike system av slike forholdstal. Eit alternativ er reint praktisk å tenke på strenge- eller blåseinstrument og ta utgangpunkt i forholdet mellom strengelengder eller luftsøylelengder for dei ulike tonane. Eit anna alternativ er å bygge opp systemet med utgangspunkt i forholdet mellom svingetalet til dei ulike tonane. Som me skal sjå nedanfor, er det eit nært slektskap mellom desse to systema. Det er berre eit spørsmål om kva som skal vere teljar og kva som skal vere nemnar i brøken som utgjer forholdstalet.

[1] Konsonans (av latin) samklang, det at to eller fleire tonar kling saman på ein måte som verkar behageleg for øyre. (Caplex, 1990)



Med utgangspunkt i ein ”pytagoreisk monokord” (sjå bilete), ein vanleg gitar eller eit anna strenginstrument, til dømes fiolin, vil ein enkelt kunne sjå og høyre følgjande: Slå an ein fri streng og legg merke til tonehøgda. Halver strengelengda, og slå an strengen. Den nye tonen vil no klinge ein oktav høgare enn den første. Den første tonen har eit bestemt svingetal (ein bestemt frekvens) som er avhengig av kva streng ein valde og korleis denne er stemt. Den tonen som kling ein oktav høgare, har eit svingetal som er dobbelt så stort som svingetalet til den første. (Dette kan enkelt kontrollerast/visualiserast med til dømes ein frekvensmålar.) Ein har altså følgjande enkle samanheng: Når ein halverer strengelengda, doblar ein svingetalet, og intervallet mellom dei to tonane vert ein oktav. Her sluttar likskapen mellom den pytagoreiske monokorden eller fiolin på den eine sida og ein vanleg gitar på den andre sida. Går ein vidare herfrå og lagar kvartar, kvintar, osv., vil ein kunne få avvik pga. at gitaren er bygd på ein temperert skala. Dette kjem eg nærare inn på seinare.

Om ein no trykkjer ned strengen på den pytagoreiske monokorden i det punktet som deler strengen i 1/3 og 2/3, og slår an den lengste delen av strengen, vil denne klinge ein kvint over den frie strengen. I vanleg musikkspråk kan dette uttrykkjast slik: Dersom den frie strengen til dømes er ein C, vil den strengen som har lengde 2/3 av den frie vere ein G.
Svingetalet til den nye tonen (G) er 3/2 gonger så stort som svingetalet til grunntonen (C). Den tonen med høgast frekvens svingar tre gonger på same tida som den tonen med lågast frekvens svingar to gonger. Kvintintervallet kan altså uttrykkjast som 1 : 2/3 eller 1 : 3/2 avhengig av om ein tek utgangspunkt i strengelengda eller svingetalet.

La oss i det vidare arbeidet velje forholdet mellom svingetala som utgangspunkt for namngjeving av tonar og intervall mellom tonar. Då kan til dømes kvintintervallet uttrykkjast som 1 : 3/2, og om ein vel C som grunntone (lik 1) så vil G kunne omtalast som 3/2.
Me skal seinare sjå at ved bruk av slike forholdstal, kan det å ”legge saman” to eller fleire tonar/intervall gjerast ved å multiplisere forholdstala for dei aktuelle intervalla.

Naturtonerekka

Når ein syng ein tone, eller slår an ein tone på eit akustisk instrument, vil den lyden ein høyrer ikkje berre vere ein enkelt tone, men eit kompleks av tonar. Dette tonekomplekset er sett saman av grunntonen og fleire overtonar. Talet på overtonar, samansetjing og innbyrdes fordeling av styrke mellom desse avgjer klangen i instrumentet eller i stemma.
Overtonane opptrer etter eit regelmessig mønster, og vert gjerne omtala som naturtonerekka eller overtonerekka[2]. Denne rekka startar med ein grunntone, som også vert kalla første partialtone. Den første overtonen, som også vert kalla andre partialtone, er ein oktav opp i høve til grunntonen, og denne har det doble svingetalet (1 : 2) i høve til grunntonen. Den andre overtonen, som vert kalla tredje partialtone, er ein kvint opp i høve til andre partialtone. Denne har eit svingetal som er tre gonger svingetalet til grunntonen, og 3/2 gonger svingetalet til andre partialtone (kvint = 1 : 3/2). Den fjerde partialtonen ligg to oktavar over grunntonen, og ein kvart over tredje partialtone. Svingetalet er fire gonger større enn

[2] I litteraturen vert omgrepa ”naturtonerekke” og ”overtonerekke” for det meste brukt synonymt, slik også eg gjer det i dette arbeidet. Innanfor einskilde retningar av musikkfaget, som til dømes folkemusikk, vil desse to omgrepa imidlertid kunne ha ulik tyding.

grunntonen sitt svingetal, og 4/3 gonger større enn tredje partialtone (kvart = 1 : 4/3). Den femte partialtonen er ein stor ters over den fjerde paritaltonen og svingetalet er fem gonger større enn grunntonen sitt svingetal (stor ters = 1 : 5/4). Den sjette partialtonen er ein kvint over den fjerde partialtonen (6/4 = 3/2), og ein liten ters over den femte partialtonen (liten ters = 1 : 6/5). Svingetalet er seks gonger større enn svingetalet til grunntonen.

Slik held det fram oppover der nummeret på partialtonen er det same som antal gonger denne tonen sitt svingetal er større enn grunntonen sitt svingetal. Differansen i svingetal mellom to nabotonar i overtonerekka er heile tida konstant, sjå tabell 1 nedanfor. Me skjønar av den grunn at tonane ligg tettare og tettare (intervalla mellom dei vert mindre og mindre) dess høgare opp i overtonerekka ein kjem.

Tabell 1:

Part. tone nr:	Tone-namn[3]:	Frekvens[4] [Hz]	Diff. mellom etterf. part.-tonar [Hz]	Intervall i forhold til næraste føregåande partialtone.
1.	C	66		1 : 1 Prim
			66	
2.	c	$66 \cdot 2 = 132$		1 : 2 (132/66 = 2/1), Oktav
			66	
3.	g	$66 \cdot 3 = 198$		1 : 3/2 (198/132 = 3/2), Kvint
			66	
4.	c^1	$66 \cdot 4 = 264$		1 : 4/3 (264/198 = 4/3), Kvart
			66	
5.	e^1	$66 \cdot 5 = 330$		1 : 5/4 (330/264 = 5/4), Stor ters
			66	
6.	g^1	$66 \cdot 6 = 396$		1 : 6/5 (396/330 = 6/5), Liten ters

Tabellen viser dei seks første partialtonane i overtonerekka, uttrykte som forholdstal og i form av frekvensar.

Frå og med 8. partialtone får ein ein tilnærma durskala. Vidare oppover i overtonerekka får ein fram tonar som dels fell saman med, og dels vert liggjande mellom tonane i durskalaen. Følgjeleg får ein på denne måten fram mange ulike tonar. Nokre av desse finn ein att i vår durskala, men naturtonerekka inneheld fleire, og andre tonar enn dei me er vande med i vår (tempererte) skala. Dette skal me kome tilbake til seinare.

Ein kunne prøve å visualisere dette ved å skrive naturtonerekka inn i eit notesystem, men frå og med 7. partialtone og oppover vert det avvik for ein del av partialtonane i høve til den tempererte skala, så dersom ein tenkjer på vår tempererte skala når ein ser eit vanleg notesystem, vert det uheldig å skrive naturtonerekka inn i dette notesystemet. Seinare i dette arbeidet vil me av den grunn heller studere forskjellane mellom delar av naturtonerekka og andre skalatypar ved å undersøke avviket i frekvens mellom ulike tonar målt i Hz og/eller cents. I det følgjande vil me omtale tonar og intervall i form av forholdstal, slik me no har lagt grunnlaget for.

---

[3] I musikkteorien er det vanleg å gje namn til dei ulike oktavane på følgjande måte: Subkontra oktav, kontra oktav, store oktav, lille oktav, einstrøken oktav, tostrøken oktav, trestrøken oktav osv. Ein tone, t.d. c, vil i kvar av desse oktavane bli skriven som: 2C, 1C, C, c, c’ eller c^1, c’’ eller c^2, c’’’ eller c^3 osv.

[4] Frekvens er definert som antal svingingar per sekund, og måleeininga for frekvens er hertz (Hz)

Før me går vidare med utleiing av fleire intervall, skal me sjå på den praktiske nytta av å skrive tonar og intervall som forholdstal. Frå musikkteorien veit me at dersom ein til dømes startar på ein grunntone og går opp ein kvint, og deretter går vidare opp ein kvart, så endar ein på den tonen som ligg ein oktav over grunntonen. Dette vert enkelt og tydeleg illustrert ved hjelp av forholdstala våre: $3/2 \cdot 4/3 = 2/1 \leftrightarrow$ Kvint + kvart = oktav.

Dette vert i musikkteorien også omtala som invertering eller omvending av intervall, fordi ein kjem fram til det same resultatet ved å flytte grunntonen i eit intervall ein oktav opp i høve til utgangspunktet. Til dømes vil ein ved å flytte grunntonen i kvinten C – G opp ein oktav, få fram kvarten G – c.

Pytagorearane hadde oppdaga dette, $2/1 : 3/2 = 4/3$ og $2/1 : 4/3 = 3/2$, og i deira talteori vart det understreka at kvint og kvart representerte ein aritmetisk og ei harmonisk deling av talforholdet 2 : 1. Kvintforholdet 3/2 deler talforholdet 2 : 1 aritmetisk fordi det i talverdi er like mykje større enn ein, som det er mindre enn to: $2 – 3/2 = 3/2 – 1 = 1/2$. Kvartforholdet deler oktavforholdet harmonisk fordi det er forholdsvis like mykje større enn ein, som det er forholdsvis mindre enn to: $(4/3 – 1)/1 = (2 – 4/3)/2 = 1/3$ (Holtsmark, 1998:124).

Så langt har me med utgangspunkt i tonane i naturtonerekka fått fram forholda i svingetal for følgjande sentrale intervall:

Oktav:	1 : 2
Kvint:	1 : 3/2
Kvart:	1 : 4/3
Stor ters:	1 : 5/4
Liten ters:	1 : 6/5

Om ein ynskjer å utvide denne lista til å omfatte fleire av dei mest sentrale intervalla innanfor oktaven, finst det fleire ulike framgangsmåtar. Ein kan fortsette å studere overtonerekka slik me har gjort til no, eller ein kan velje eit meir spanande alternativ som i tillegg demonstrerer korleis me kan "rekne" med desse intervalla**.** For å utleie intervalla liten og stor sekst, kan ein "invertere intervalla" stor og liten ters på følgjande måte:

Stor ters + liten sekst = oktav $\leftrightarrow (5/4) \cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 8/5$.

Tilsvarande får ein for:

Liten ters + stor sekst = oktav $\leftrightarrow (6/5) \cdot x = 2 \Leftrightarrow x = 5/3$.

Me har altså utleia to nye intervall:

Liten sekst:	1 : 8/5
Stor sekst:	1 : 5/3

Tradisjonelt er det berre desse sju intervalla innanfor oktaven som har blitt oppfatta som konsonerande[5]. Med unntak av liten sekst, som i følgje Helmholtz (1954) er den mest

[5] Om eit intervall vert oppfatta som konsonerande eller dissonerande, har endra seg med tida. Fram til om lag 1400-talet vart berre prim, oktav, kvart og kvint aksepterte som konsonerande. I løpet av det 14. hundreåret vart

uperfekte av konsonansane, ser ein at forholda mellom svingetala til alle dei konsonerande intervalla kan uttrykkast ved hjelp av dei heile tala 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Dette er altså det forholdet eg nemnde innleiingsvis som ein finn mellom dei seks første heile tala og musikalsk konsonans. Pytagoras kjende til dette for nærare to og eit halvt tusen år sidan.

For å komplettere durskalaen, må me finne forholdstala for intervalla stor sekund og stor septim, som i følgje Helmholtz (1954) er dissonerande intervall. Desse kan ein få fram på ulike måtar. Ein framgangsmåte er å foreta ei direkte samanlikning mellom svingetala eit stykke ute i overtonerekka: Til dømes er intervallet mellom 8. og 9. partialtone i overtonerekka, c^2 og d^2, ein sekund. Svingetalet til 9. partialtone er 9/8 gonger svingetalet til den 8. partialtonen. Sekundintervallet kan dermed skrivast som 1 : 9/8. Septimintervallet (liten septim) kan då utleiast ved å invertere det store sekundintervallet, på same måte som då me utleia intervalla for sekstane. I staden for å gjere det, skal me no sjå på ein tredje framgangsmåte. Også denne går ut på å skape nye intervall ved kombinasjonar av allereie utleia intervall. Dette gjev oss ein ny sjanse til å "rekne" med desse intervalla. Ein kan til dømes ta utgangspunkt i enkle akkordar (treklangar). Ein durakkord er bygd opp av ein stor ters og ein liten ters. Til dømes er G-dur akkorden sett saman av dei tre tonane G, H og D. Desse dannar følgjande innbyrdes forhold: Mellom G og H er det ein stor ters (1 : 5/4), mellom H og D er det ein liten ters (1 : 6/5) medan G og D dannar ein kvint (1 : 3/2). Heile G-dur akkorden kan skrivast: G : H : D = 1 : 5/4 : 3/2.

Intervallet mellom C og G er også ein kvint (1 : 3/2), følgjeleg vil ein om ein relaterer intervalla i G-dur akkorden til C, få fram følgjande forholdstal:

C : G : H : D = 1 : ((3/2)·1) : ((3/2)·(5/4) : ((3/2)·(3/2)) = 1 : 3/2 : 15/8 : 9/4.

Det siste intervallet 1 : 9/4 er større enn ein oktav. Går ein ned ein oktav får ein: 1 : (9/4)·(1/2) = 1 : 9/8. Relatert til C, dannar H eit stort septimintervall (1 : 15/8) og D eit stort sekundintervall (1 : 9/8), og me har dermed funne dei forholdstala me var på jakt etter.

No har me altså utleia forholdstala mellom grunntonen C og dei andre "stamtonane" i durskalaen, og samla ser desse forholda slik ut:

C : D : E : F : G : A : H : C
1 : 9/8 : 5/4 : 4/3 : 3/2 : 5/3 : 15/8 : 2

Ei meir detaljert oversikt, som også inkluderer halvtonar, er presentert i tabell A1.

Brukt i samband med prosjektarbeid eller anna tverrfagleg arbeid ser me her at me får kombinert spanande musikkteori med grunnleggjande kunnskap om brøk og brøkrekning.

---

tersane , og noko seinare også sekstane rekna som konsonerande intervall. I tradisjonell harmonilære vart store og små sekundar og septimar og i tillegg alle forstørra og forminska intervall rekna som dissonerande. I dag er grensene for kva som vert oppfatta som konsonans og dissonans langt mindre tydelege, og sjølve dissonansomgrepet har fått ei friare tolking (Benestad, 1991: 70 - 71).

Ulike skalatypar

Reinstemt skala

Me har så langt sett på oppbygginga av ein diatonisk skala[6] med utgangspunkt i overtonerekka eller naturtonerekka. Ein slik skala vert gjerne kalla "reinstemt" skala. Dette er "naturens eigen" skala, og vil såleis vere den "beste" dvs. den som i utgangspunktet skulle klinge best i våre øyre. Det er likevel ikkje denne skalaen me bruker i dag her i "den vestlege verda". Årsaka til det er reint historisk og praktisk, og har med konstruksjon og oppbygging av instrument å gjere. Dette gjeld spesielt tangentinstrument, strenginstrument med faste band og blåseinstrument med ventilar eller faste hol.

Det er i prinsippet enkelt å lage eit instrument som er stemt etter ein reistemt skala i ein bestemt toneart, problemet oppstår om ein skal transponere til ein annan toneart. Eit instrument som er reinstemt i ein toneart vil nemleg ikkje kunne brukast i ein annan toneart. Det har fram gjennom tidene vore utvikla mange ulike reinstemte, eller tilnærma reinstemte, instrument som kan brukast i ulike toneartar. Problemet for desse instrumenta var at dei vart relativt kompliserte reint mekanisk. Desse instrumenta byggjer på ein teori der ein føretek ei finare inndeling av oktaven enn den 12-delinga me brukar i dag. Ulike variantar vart utvikla og prøvd ut, blant anna å dele oktaven inn i 19, 24, 31, 36 eller 53 like store intervall. Sjå til dømes Groven (1948) og Partch (1974).

La oss no sjå på kva som er årsaka til at eit instrument som er stemt etter ein reinstemt skala berre er stemt innanfor ein bestemt toneart. I ein skala bygd på overtonerekka er nemleg ikkje alle heiltoneintervalla like store.[7] Intervalla mellom dei ulike "stamtonane" i den reinstemte durskala er:

C – D : 9/8
D – E : 10/9
E – F : 16/15
F – G : 9/8
G – A : 10/9
A – H : 9/8
H – C : 16/15

Me ser at dei to halvtoneintervalla som er representerte her er like store (16/15), medan det er to ulike heiltoneintervall: 9/8 og 10/9. Ein kan dermed ikkje utan vidare transponere frå ein toneart til ein annan. Transponering frå ein toneart til ein vilkårleg annan toneart ville normalt føre til at skalaen endra karakter ved at til dømes rekkefølgja for "store og små heiltoneintervall" vert endra. For å korrigere for dette treng ein altså eit sinnrikt system av mange ulike "nesten like" tonar, noko som fort vert komplisert på instrument som fungerer mekanisk.
Helmholtz (1954) la det teoretiske grunnlaget for å kunne bygge instrument der ein fekk fram den reinstemte skalaen innanfor alle toneartar. Dette kravde 55 tonar i oktaven. Det vart bygd eit harmonium av Eitz i Eisleben direkte etter dette prinsippet, med 55 tangentar innanfor ein oktav. Det vart sjølvsagt svært komplisert å traktere eit klaviatur med så mange tangentar. Seinare klarte Puhlmann i Stuttgart (1926) og Eivind Groven (1936), uavhengig av og

[6] "Diatonisk skala" er eit kvart notesystem som delar oktaven i sju trinn, med fem heile og to halve trinn (Caplex, 1990).
[7] Heller ikkje alle halvtoneintervalla er like store.

uvitande om kvarandre, å utvikle instrument som hadde 55 tonar i oktaven, men som brukte vårt vanlige klaviatur med 12 tangentar i kvar oktav. I Puhlmann sitt instrument var overføringane frå dei 12 tangentane til dei 55 ulike tonane reint mekaniske, medan Groven brukte elektrisk-mekaniske overføringsmekanismar. Harry Partch frå USA komponerte gjennom mange tiår musikk og utvikla mange ulike instrument og typar av instrument tilpassa den reinstemte skalaen (Partch, 1974). Framleis er det stor interesse for den reinstemte skalaen, noko eit søk på internett raskt vil stadfeste. (Forslag til søkeord: ”Just intonation”)

Temperert skala
For på ein enkel måte å kunne transponere frå ein toneart til ein vilkårleg annan toneart, samstundes som ein avgrensar oppdelinga av oktaven i 12 halvtonar, vart det på siste halvdel av 16-hundretalet og utover 17-hundretalet utvikla ulike former for ”tempererte skalaer”. Desse skalaene vert no i ettertid gjerne omtala som ”ulikesvevande temperaturskalaer”. Skalaene var ulike på den måten at dei prøvde å halde enkelte utvalde intervall reine. Noko som medførte at andre intervall vart meir eller mindre ”falske”. Mange var engasjerte i dette arbeidet, sjå Helmholtz (1954: 320 – 330) og Ellis i Helmholtz (1954: 431, 546 – 547).
Ei stemming som var mykje brukt i denne perioden vart kalla ”meantone temperament”. Denne gjekk ut på å stemme dei store tersane innanfor dei mest vanlege toneartane reine på bekostning av kvintane, og mindre brukte toneartar. Gjennom denne stemminga kunne ein få fram ein tilnærma reinstemt skala innanfor ein bestemt toneart, og brukbare skalaer i dei næraste toneartane, medan fjernare toneartar vart nærast ubrukelege på grunn av altfor høge tersar og den ekstremt falske kvinten. Denne vart kalla ”ulve-kvinten” fordi lyden kunne minne om eit ulvehyl!

Den skalaen me brukar i dag vert omtala som ”likesvevande temperaturskala” (Benestad, 1991), 12- temperert (Groven, 1948) eller berre ”temperert”(Engelsk: ”equal tempered scale”). Den historiske bakgrunnen til denne skalaen er omfattande og noko ”kronglete”, spesielt innanfor dei europeiske landa frå det 17. til det 19. hundreåret. Eg vil i det følgjande berre prøve å trekke opp hovudlinjene.
Det teoretiske grunnlaget for denne skalaen var lagt straks pytagorearane hadde utvikla sin skala, og ein hadde oppdaga det såkalla ”pytagoreiske komma” (nærare utgreiing om dette i neste avsnitt om den pytagoreiske skalaen). Aristoxenus, son til ein musikar og komponist, og elev av Aristoteles, omtalte denne skalaen, ikkje direkte, men gjennom å slå fast at kvarten er bygd opp av to heile tonar og ein halv tone, noko som er eksakt rett berre innanfor den tempererte skalaen (Ellis i Helmholtz, 1954: 548). Denne skalaen si europeiske historie startar med pytagorearane, men i følgje Amiot hadde kinesarane utvikla denne skalaen lenge før Pytagoras tid. I nyare europeisk historie må me fram til 1636 før denne igjen blir omtala av Mersenne, og seinare av blant andre Werckmeister i 1691, Neidhard i 1706 og Rameau i 1726. For meir detaljert oversikt sjå Helmholtz (1954: 321) og Ellis i Helmholtz (1954: 548 - 549). I 1885 oppsummerte Ellis med å slå fast at i England var denne stemminga berre 40 år gamal for piano og berre 30 år gamal for orgel, og at ”meantone temperament” framleis var utbreidd for orgel rundt omkring i England og i endå større grad i Spania.

Prinsippet bak denne likesvevande temperaturskalaen er at oktaven skal vere ”rein” dvs. lik oktaven i den reinstemte skalaen, og medfører ei dobling av svingetalet (frekvensen) når ein går opp ein oktav. Ein oktav er bygd opp av tolv halvtonar. I denne tempererte skalaen vert alle desse halvtonane gjort like store, og følgjeleg vert også alle heiltonane like store. Eit slikt halvtoneintervall vert då: $1 : \sqrt[12]{2} = 1 : 1{,}0594631$ (Når ein legg saman alle 12 halvtonane, som er det same som at ein multipliserer alle 12 halvtoneintervalla med kvarandre, skal ein få ein oktav. $\Rightarrow x^{12} = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[12]{2}$).

Med utgangspunkt i dette halvtoneintervallet og ein gitt basistone, som for tida er $a^1 = 440$ Hz[8], vert altså den tempererte skalaen bygd opp på følgjande enkle måte:
Startar med basistonen $a^1 = 440$ Hz.
Den første halvtonen over a^1, $a^1\# = b^1$, kan ein rekne ut på følgjande måte: $a^1\# = b^1 = a^1 \cdot \sqrt[12]{2} = a^1 \cdot 2^{1/12} = 440 \text{ Hz} \cdot 2^{1/12} = 466{,}16$ Hz.[9]
Dei neste halvtonane oppover i skalaen kan finnast på tilsvarande måte:
$h^1 = a^1 \cdot (\sqrt[12]{2})^2 = 440 \text{ Hz} \cdot (\sqrt[12]{2})^2 = 493{,}88$ Hz
$c^2 = a^1 \cdot (\sqrt[12]{2})^3 = 440 \text{ Hz} \cdot (\sqrt[12]{2})^3 = 523{,}25$ Hz
$c^2\# = d^2\flat = a^1 (\sqrt[12]{2})^4 = 440 \text{ Hz} \cdot (\sqrt[12]{2})^4 = 554{,}37$ Hz
$d^2 = a^1 \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 440 \text{ Hz} \cdot (\sqrt[12]{2})^5 = 587{,}33$ Hz

Slik kan ein fortsette med å bygge opp alle halvtonane innanfor oktaven. Resultata er gitt i tabell A2 og tabell A3. Sjå også tabell A1.

På eit instrument som er stemt temperert skal ein altså fritt kunne transponere frå ein toneart til ein annan utan at skalaen endrar karakter – skalaen er like "sur" i alle toneartar!

Kor stor er forskjellen mellom desse ulike skalatypane, og kor lett er det å høyre forskjell på dei? Før me prøver å svare på det, skal me sjå på ein tredje skalatype, den pytagoreiske skalaen.

Pytagoreisk skala
Denne skalaen er interessant både ut frå eit matematisk og eit musikalsk synspunkt. Det pytagoreiske systemet dominerte musikken lenge, og har betydd mykje for den musikalske og musikkteoretiske utviklinga frå antikken og fram til 1600-talet. Til dømes er alle strykeinstrument, bortsett frå kontrabass, stemte slik at intervalla mellom kvar av dei frie strengane er ein pytagoreisk kvint. I undervisningssamanheng vil me gjennom den utleiinga som no følgjer, sjå at arbeid med denne skalaen vil gje gode høve for trening med potensrekning.

Denne skalaen er bygd opp av ein serie med reine kvintar, som er lik kvinten i naturtonerekka, det vil seie intervall som kan uttrykkast med forholdet mellom svingetala på 3/2 (sjå avsnittet om naturtonerekka).

---

[8] Frekvensen til kammertonen a^1 har variert fram gjennom tidene. Frå ca. 1600 til 1820 var kammertonen om lag ein halv tone lågare enn i dag. Det vart også nytta ulike kammertonar innafor ulike "musikktypar". I barokktida nytta dei ein kammertone til kammermusikk, ein annan til orgel, som kunne vere opp til ein liten ters høgare enn den dei nytta i kammermusikken, og ein tredje til bymusikantane sine messinginstrument. Det var i tillegg også geografiske variasjonar i val av kammertone:

Paris:	1783 a^1 = 409 Hz	Berlin:	1759 a^1 = 427 Hz	Leningrad:	1771 a^1 = 417 Hz
	1821 a^1 = 431 Hz		1821 a^1 = 437 Hz		1796 a^1 = 437 Hz
	1833 a^1 = 434 Hz		1833 a^1 = 442 Hz		1830 a^1 = 452 Hz
	1852 a^1 = 449 Hz		1858 a^1 = 443 Hz		1857 a^1 = 460 Hz

I 1858 bestemte franskmennene at a^1 skulle vere 435 Hz. Denne frekvensen vart etterkvart brukt i mange land. Ein internasjonal samanslutning av land foreslo i 1939, etter initiativ frå USA, å heve kammertonen til 440 Hz.. Denne vart endelig akseptert i 1953.

[9] Tolvte rota av to, $\sqrt[12]{2}$, kan også skrivast som $2^{1/12}$. Då vil vidare $(\sqrt[12]{2})^2 = 2^{2/12}$ og $(\sqrt[12]{2})^3 = 2^{3/2}$.

La oss starte med ein grunntone, til dømes C. Går me opp ein kvint, kjem me til G. Held me fram oppover ein kvint til, kjem me til d, og går me ned igjen ein oktav kjem me til D. Me får altså fram ein sekund ved å gå opp to kvintar og ned ein oktav: $3/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 = 9/8$, som er det same forholdstalet som me fann for den reinstemte skala (naturtonerekka) (sjå tabell 2).
Går me opp ein kvint i høve til d, kjem me til a, som ligg ein stor sekst over c. Relatert til grunntonen C har me no gått opp tre kvintar, og for å få fram den store seksten C – A må me ned igjen ein oktav (sjå tabell 2). Utrekninga kan stillast opp som følgjer: $(3/2)^3 \cdot 1/2 = 27/16$.
Den pytagoreiske store seksten er ein faktor 81/80 større enn den store seksten (5/3) i den reinstemte skalaen. $[(5/3) \cdot (81/80) = 27/16]$
Går me vidare ein kvint opp frå a, kjem me til e^1. Denne ligg ein stor ters over c^1. (Sjå tabell 2.) I høve til grunntonen C, har me no gått opp fire kvintar og for å få fram den store tersen C – E, må me ned igjen to oktavar: $((3/2)^4) \cdot (1/2)^2 = 81/64$. Den store tersen i den pytagoreiske skalaen er ein faktor 81/80 større enn den store tersen i den reinstemte skalaen (5/4). Denne faktoren, 81/80, vert kalla det syntoniske eller det didymiske komma, etter den greske teoretikaren Didymos (fødd år 63 f.Kr.).
Ein kvint opp i høve til e^1 fører oss til h^1, som ligg ein stor septim over c^1. I høve til grunntonen C, har ein no gått opp fem kvintar, og for å få fram den store septimen, C – H, må ein ned igjen to oktavar: $((3/2)^5) \cdot (1/2)^2 = 243/128$. Den store septimen i denne skalaen er ein faktor 81/80 større enn den store septimen i den reinstemte skalaen (15/8).

No har me altså utleia forholdstala mellom grunntonen C og ein del av dei andre tonane i den pytagoreiske skalaen, og samla ser desse forholda slik ut[10]:

C	D	E	F	G	A	H	c
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Slik kan ein fortsette i ”kvintsprang” oppover i oktavane, men i neste steg møter ein på eit lite ”problem”. Ein rein kvint er sett saman av tre heile og eit halvt tonetrinn. I C-dur er alle kvintane reine, bortsett frå den på 7. trinn (H – F) som er forminska. For at også dette intervallet skal bli ein rein kvint, må ein her utvide ein halv tone frå F til F#. Ein rein kvint opp i høve til h^1 fører oss altså opp til $f\#^2$, som dannar ein forstørra kvart (tritonus) i høve til c^2. I høve til grunntonen C, har ein no gått opp seks kvintar, og for å få fram den forstørra kvarten, C – F#, må ein ned igjen tre oktavar: $((3/2)^6) \cdot (1/2)^3 = 729/512$. Den forstørra kvarten i denne skalaen er ein faktor 3645/3584 større enn den forstørra kvarten i naturtonerekka.

Dersom ein held fram oppover denne kvintrekka, ser ein frå tabell 2 at 7., 8., 9. og 10. kvintintervall treff på # tonar, medan den 11. og 12. ”tilsynelatande” kjem tilbake på dei ”ordinære” tonane f^5 og c^6, men som me skal sjå nedanfor, vert det ikkje slik. I staden for f^5 og c^6 får me dei litt høgare tonane som me kan kalle ”$e\#^5$” og ”$h\#^5$”.

[10] Frå tabell 2 ser ein at kvartintervallet kjem fram først i ellevte kvintintervall med følgjande forholdstal: 1:177147/131072. Dette er litt større enn det reine kvartintervallet 1:4/3 som pytagorearane brukte. Det reine kvartintervallet var nemleg eit av dei tre symfone intervalla den greske musikkteorien bygde på på Pytagoras' tid: oktav (1:2), kvart (1:4/3) og kvint (1:3/2). Prinsippet med å gå oppover i kvintrekka vart brukt for å utleie dei resterande intervalla: sekund, ters, sekst, osv. Alexander J Ellis spør om, og argumenterer for at, den greske skalaen faktisk bygde på ein serie reine kvartar (1:4/3) i staden for reine kvintar (1:3/2) slik det tradisjonelt har blitt antatt (Ellis i Helmholtz, 1954: 279).

Tabell 2:

Rein kvint

Første kvintintervall:

C	C#	D	D#	E	F	F#	G

Stor sekund

Andre kvintintervall:

G	G#	A	A#	H	c	c#	d

Stor sekst

Tredje kvintintervall:

d	d#	e	f	f#	g	g#	a

Stor ters

Fjerde kvintintervall:

a	a#	h	c^1	$c\#^1$	d^1	$d\#^1$	e^1

Stor septim

Femte kvintintervall:

e^1	f^1	$f\#^1$	g^1	$g\#^1$	a^1	$a\#^1$	h^1

Forstørra kvart/forminska kvint

Sjette kvintintervall:

h^1	c^2	$c\#^2$	d^2	$d\#^2$	e^2	f^2	$f\#^2$

Liten sekund

Sjunde kvintintervall:

$f\#^2$	g^2	$g\#^2$	a^2	$a\#^2$	h^2	c^3	$c\#^3$

Liten sekst

Åttande kvintintervall:

$c\#^3$	d^3	$d\#^3$	e^3	f^3	$f\#^3$	g^3	$g\#^3$

Liten ters

Niande kvintintervall:

$g\#^3$	a^3	$a\#^3$	h^3	c^4	$c\#^4$	d^4	$d\#^4$

Liten septim

Tiande kvintintervall:

$d\#^4$	e^4	f^4	$f\#^4$	g^4	$g\#^4$	a^4	$a\#^4$

"Kvart"

Ellevte kvintintervall:

$a\#^4$	h^4	c^5	$c\#^5$	d^5	$d\#^5$	e^5	$f^5(e\#^5)$

Tolvte kvintintervall:

$f^5(e\#^5)$	$f\#^5$ *	g^5 *	$g\#^5$ *	a^5 *	$a\#^5$ *	h^5 *	$c^6(h\#^6)$

Tabell over "kvintsirkelen", viser 12 etterfølgjande kvintar.

* Frå og med tredje kvintintervall vil dei ulike intervalla ein utleier frå kvintsirkelen bli større enn dei tilsvarande intervalla i den reinstemte og tempererte skalaen. Dette avviket vert større og større for kvart kvintintervall ein går oppover. I tolvte kvintintervall er dette markert ved å gje tonane "nye namn" for å skilje dei frå tonane i den reinstemte skalaen. (Sjå meir inngåande forklaring i den tilhøyrande teksten på side 12 og 14.)

På eit vanleg tangentinstrument stemt etter temperert skala, vil ein, om ein går opp 12 kvintar, kome fram til den tonen som har same namn og som ligg sju oktavar over den tonen ein starta med. Om ein til dømes startar på C, vil ein etter 12 kvintar ende på c^6. Slik blir det ikkje om ein legg 12 reine kvintar (1 : 3/2) frå den reinstemte skala eller den pytagoreiske skala etter

kvarandre. Startar ein ut med C, endar ein på "h#[5]" som er ein faktor 531 441/524 288 høgare enn c[6]. Dette er altså forskjellen mellom 12 reine kvintar og 7 oktavar, og kan reknast ut på følgjande måte: $(3/2)^{12} \cdot (1/2)^7$ = 531 441/524 288. Denne forskjellen vert kalla "det pytagoreiske komma".
Du kan høyre det pytagoreiske komma her:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/Det%20pytagoreiske%20komma.WAV
(Først kling dei to tonane som dannar det pytagoreiske intervallet separat, deretter kling dei saman.)

Den reine kvinten er altså ein faktor $(531\,441/524\,288)^{1/12}$ større enn den tempererte kvinten [$(\text{rein kvint})^{12}$ = pytagoreisk komma · $(\text{temperert kvint})^{12}$ ⇔ rein kvint = $(\text{pytagoreisk komma})^{1/12}$ · temperert kvint]. Ein kan også sei det slik at i den tempererte skalaen er feilen frå det pytagoreiske kommaet fordelt jamt utover kvar av dei 12 kvintane i kvintsirkelen, ved at den tempererte kvinten er ein faktor $1/(531\,441/524\,288)^{1/12}$ mindre enn den reine kvinten.

I tabell A1 har eg laga ei samla og utvida oversikt over forholdstala for dei tre skalatypane me no har utleia.

For å få ei betre forståing for storleiken på desse faktorane som me no har funne, kan det vere nyttig å innføre måleeininga cents[11]. Dette vart gjort av Alexander J. Ellis i 1864 (Ellis i Helmholtz, 1954: 431). Med utgangspunkt i den tempererte skalaen definerte han ein halvtone til å vere 100 cents. Følgjeleg vert det 1200 cents i ein oktav. Eit slikt cent-intervall vert då $1 : \sqrt[1200]{2} = 1 : 1{,}0005778$.

Det pytagoreiske komma vert omrekna til denne måleeininga lik om lag 24 cents. [$(1\text{cent})^x$ = pyt.komma, ⇔ $x = \ln(\text{pyt.komma})/\ln(1\text{cent})$ ⇔ $x = 23{,}460011$].
Desse 23,46 centane skal altså fordelast jamt utover dei 12 kvintane i kvintsirkelen, noko som fører til at den tempererte kvinten vert om lag 2 cents mindre enn kvinten i naturtonerekka og i den pytagoreiske skala.

I samband med utleiinga av forholdstala for intervalla i den pytagoreiske skalaen fann me at intervalla for stor ters, stor sekst og stor septim alle var ein faktor 81/80 større enn forholdstala for dei tilsvarande intervalla i naturtoneskalaen. Omrekna til cents utgjer denne faktoren ein forskjell på tilnærma 22 cents. [$(1\text{cent})^x = 81/80$ ⇔ $x = \ln(81/80)/\ln(1\text{cent})$ ⇔ $x = \ln(81/80)/\ln(1{,}0005778)$ ⇔ $x = 21{,}50629$].

La oss også rekne om dei ulike intervalla frå dei ulike skalaene gitt som forholdstal til cents, for lettare å kunne samanlikne forskjellane mellom dei. Eg vil vise omrekninga for det eine av desse intervalla, ein stor ters frå naturtonerekka: $(1\text{cent})^x = 5/4$ ⇔ $x = \ln(5/4)/\ln(1\text{cent})$ ⇔ $x = \ln(5/4)/\ln(1{,}0005778)$ ⇔ $x = 386{,}31372$. Sjå tabell 3.

Dei to ulike heiltoneintervalla i naturtoneskalaen, som me tidlegare har utleia, 9/8 og 10/9, vert omrekna til denne måleeininga lik 203,9 og 182,4 cents. (Det tempererte heiltoneintervallet er lik 200 cents.)

[11] Ei anna måleeining, "mo" = millioktav, kan brukast i staden for cents. Denne er definert som 1/1000 av ein oktav.

No er grunnlaget lagt for ei enkel samanlikning av dei ulike skalaene.

Samanlikning av dei tre skalatypane

La oss først samanlikne desse skalaene numerisk. Etterpå skal me sjå på enkle forsøk/øvingar me kan gjere for å teste ut desse forskjellane auditivt.

Tabell 3

	Prim	Stor sekund	Stor ters	Kvart	Kvint	Stor sekst	Stor septim	Oktav
Reinstemt skala	0	204	386	498	702	884	1088	1200
Pytagoreisk skala	0	204	408	498	702	906	1110	1200
Temperert skala	0	200	400	500	700	900	1100	1200

Tabellen viser skalatoneintervalla (kvar av tonane relatert til grunntonen i skalaen) målt i cents for dei tre omtalte skalatypane, avrunda til næraste heile cent.

Frå tabellen ser me at den største forskjellen er mellom den pytagoreisk skalaen og den reistemte skalaen, der tersen, seksten og septimen alle er 22 cents, dvs. om lag 1/5 av ein halvtone, høgare i den pytagoreiske skalaen. På den andre sida er sekund, kvart og kvint heilt like i desse to skalaene.

Forskjellane mellom temperert skala og den pytagoreiske skalaen er ikkje så stor. Det er mellom septimane me her finn den største forskjellen, og den er på 10 cents. Mellom tersane er det ein differanse på 8 cents. I begge desse tilfella er det den pytagoreiske skalaen som ligg over den tempererte. For desse to intervalla er det den tempererte skalaen som ligg nærast den reinstemte skalaen. Mellom dei andre intervalla er det frå 2 til 6 cents i forskjellar.

Samanliknar me den tempererte skalaen med den reinstemte skalaen, ser me at den største forskjellen er på 16 cents, og det er mellom sekstane. Mellom tersane er det ein differanse på 14 cents, og mellom septimane er differansen 12 cents. I alle desse tre tilfella er intervalla i den reinstemte skalaen lågare enn i den tempererte skalaen. For dei andre intervalla varierer differansen frå 2 til 4 cents, og det varierer også kven av desse som er høgast.

Eit interessant spørsmål i denne samanheng er sjølvsagt: Kor lett er det å legge merke til desse forskjellane mellom dei tre ulike skalatypane? Er dette noko som er mogleg å oppfatte for eit "normalt øyre", eller er det berre dei spesielt musikalske som vil registrere forskjellen?

I følgje W. Preyer: "Ueber die Grenzen der Tonwahrnehmung" referert etter Ellis (fotnote side 147) i Helmholtz (1954) er praktiserande musikarar i stand til å skilje tonar med ein differanse på ned til ½ Hz i den tostrøkne oktav. Evna til å skilje ulike tonar er nemleg avhengig av frekvensområdet desse tonane ligg innanfor. Til dømes vart følgjande små differansar mellom to tonar registrerte av forsøkspersonar:

0,418 Hz ↔ 6,0 cents ved 120 Hz
0,364 Hz ↔ 1,4 cents ved 440 Hz
0,300 Hz ↔ 1,0 cents ved 500 Hz
0,500 Hz ↔ 0,9 cents ved 1000 Hz

medan følgjande differansar, som har det same avviket målt i cents som dei ovanfor, men innanfor eit anna frekvensområde, ikkje vart registrerte:

0,200 Hz ↔ 6,0 cents ved 60 Hz
0,091 Hz ↔ 1,4 cents ved 110 Hz
0,150 Hz ↔ 1,0 cents ved 250 Hz
0,200 Hz ↔ 0,9 cents ved 400 Hz

Generelt gjennom heile skalaen vart ein differanse på 1/5 Hz ikkje oppfatta. Frå $_1$G# til g#^{1} vart ein differanse på 2/5 Hz oppfatta. Frå a^1 til c^2 vart ein differanse på 1/3 Hz oppfatta, og ein differanse på 1/2 Hz vart oppfatta i området frå c til c^3.
La oss no sjå kva Preyer sine resultat kan bidra med i våre skalastudium. Frå tabell 3 ser ein at dei største forskjellane me fann var for dei store tersane og dei store sekstane mellom den pytagoreiske skalaen og naturtoneskalaen. Differansen var her på 22 cents. Frå tabell A3 finn ein at differansen for den store tersen c – e mellom den reinstemte og den pytagoreiske skalaen utgjer:

0,51 Hz i kontraoktaven (1$E_{Reinstemt}$ = 40,88 Hz, 1$E_{Pytagoreisk}$, = 41,39 Hz)
1,02 Hz i den store oktaven ($E_{Reinstemt}$ = 81,76 Hz, $E_{Pytagoreisk}$, = 82,78 Hz)
2,04 Hz i den vesle oktaven ($e_{Reinstemt}$ = 163,52 Hz, $e_{Pytagoreisk}$, = 165,56 Hz), og vidare med ei dobling for kvar oktav oppover. Nede i kontraoktaven vil nok denne differansen ligge i grenselandet for kva dei fleste vil vere i stand til å oppfatte, men frå og med den store oktaven og oppover vil feilen bli meir og meir markert dess høgare opp i frekvensområde ein kjem. Dette fordi talet på svingingar (Hz) som svarar til ein cent vert større dess høgare opp i oktavane ein kjem. Dette ser ein lett frå tabell A3 der 1200 cents i kontraoktaven tilsvarar: C (65,4 Hz) – 1C (32,7 Hz) = 32,7 Hz, medan 1200 cents i den tostrøkne oktaven tilsvarar: c^3 (1046,4 Hz) – c^2 (523,2 Hz) = 523,2 Hz.
Her kan du høyre dei to ulike tersane i dei tre oktavane nemnde ovanfor:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/Reistemt+pyt_tersar_kontra-store-lilleoktav.doc

For oss vil det i praksis vere meir interessant å studere differansane mellom den tempererte skalaen og den reinstemte skalaen. Samanliknar ein tala i kolonnen for ”Differanse Reinst-temp [Hz]” frå tabell A3 med Preyer sine resultat, ser ein at i kontraoktaven vil ein truleg ikkje kunne høyre forskjell på samsvarande intervall i naturtoneskalaen og den tempererte skala, kanskje med unntak av det forstørra kvartintervallet, stor sekst og stor septim.
Her kan du teste om du kan høyre forskjellen:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/Halvtoneskala_rein+temp_kontraoktav.doc

I den store oktaven kan ein vente å registrere forskjell mellom dei to skalaene for liten og stor ters, forstørra kvart, liten og stor sekst og stor septim.
Her kan du teste om du kan høyre forskjellen:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/Halvtoneskala_rein+temp_store_oktav.doc

I tillegg til prim og oktav, er det berre for stor sekund, kvart og kvint at ein ikkje kan vente registrerbar forskjell mellom dei to skalaene i den vesle oktaven. I den einstrøkne oktaven ligg forskjellane for kvar av intervalla kvart og kvint i dei to skalaene akkurat i grenseland for kva ein i flg. Preyer kan oppfatte.

Her får du høyre alle tre skalaene i den einstrøkne oktaven spelt etter kvarandre og den reinstemte saman med kvar av dei andre to:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/C-durskala_reinstemt+temp+pyt+saman.doc

Frå og med den tostrøkne oktaven bør ein kunne registrere forskjell mellom dei to skalaene for alle intervalla, bortsett frå prim og oktav, der dei to skalaene heile tida er identiske.

Det faktum at to ulike skalaer har ein registrerbar forskjell mellom samsvarande tonar og intervall er i seg sjølv interessant. Det som imidlertid er endå meir interessant, er å sjå at denne forskjellen mellom naturtoneskalaen og ein av dei andre skalaene faktisk får konsekvensar internt i den aktuelle skalaen og bruken av denne. Når ein slår an ein akkord som er sett saman av tre eller fleire tonar, vil ein finne felles tonar mellom overtonane og akkordtonane og mellom overtonane til dei ulike akkordtonane. I naturtoneskalaen vil desse tonane vere like og klinge saman i ein komplett harmoni. I dei andre skalaene vil det bli dissonans mellom ein akkordtone sine overtonar (som bygger på naturtonerekka) og ein eller fleire av dei andre akkordtonane (som bygger på skalatonane). Det store avviket mellom den pytagoreiske skala og naturtoneskalaen sin store ters, gjer at den pytagoreiske skala er svært dårleg eigna til akkordspel. Eit par enkle døme vil illustrere dette:

Når to tonar kling saman, vil det bli danna kombinasjonstonar med frekvens lik differansen og summen mellom frekvensane til dei to tonane i samklangen. Me skal no sjå nærare på differansetonar, og resultatet av desse. Når ein slår an ein stor ters i naturtoneskalaen, for eksempel c’ – e’, vil differansetonen bli (sjå tabell A2**)**: 330Hz – 264Hz = 66Hz, som er lik C (to oktavar under grunntonen i akkorden). Denne differansetonen vil i naturtoneskalaen skape ein fyldig harmonisk bassklang i akkorden. Det vil ikkje vere tilfelle innanfor ein av dei andre omtalte skalatypane. Om ein slår an den tilsvarande store tersen c’ – e’ i den tempererte skalaen (sjå tabell A2), får ein følgjande differansetone: 329,63 Hz – 261,63 Hz = 68,00 Hz. Denne differansetonen fell ikkje saman med den tempererte skalaen sin C, som er lik 65,41 Hz. Differansen mellom desse to tonane er: 68,00 Hz – 65,41 Hz = 2,59 Hz. Dette er ein svært lågfrekvent tone, som vil bli oppfatta som ei ”svevande brumming”. ”Brumminga” kjem frå den lågfrekvente tonen. ”Svevinga” har følgjande interessante fysiske grunngjeving: Når to nesten like tonar kling saman, vil me oppfatte dette som ein tone med frekvens lik middelverdien av dei to tonane sine frekvensar. Styrken på denne tonen vil variere rytmisk i eit svevande mønster, der frekvensen til svevingane er lik frekvensen til differansetonen. Når differansen mellom frekvensane til dei to tonane aukar, vil også farten til svevingane (svevingsfrekvensen) auke. Omvendt vil svevingane avta når differansen mellom frekvensane til dei to tonane vert mindre, og til slutt forsvinne heilt om dei to tonane vert like. Dette fenomenet vert nytta ved stemming av strengeinstrument og piano. Den tilsvarande store tersen c’ – e’ i den pytagoreiske skala gjev ein differansetone som ligg om lag 4 Hz over denne skalaen sin C. I dette frekvensområdet (den store oktav) vil 4 Hz tilsvare om lag ein halv tone, slik at den middelverditonen som vårt øyre oppfattar vert tilnærma ein C#, som vert oppfatta som ein dissonans i akkorden. Den pytagoreiske skalaen er dermed dårleg eigna til tradisjonelt akkordspel.

Her kan du høyre ein enkel durakkord i kvar av dei tre skalatypane. Først ein og ein akkordtone, deretter som arpeggio i kvar av dei tre skalaene. Til slutt akkorden i den reinstemte skalaen saman med kvar av dei andre to skalaene:
http://sophus.hivolda.no/skorpen/musikk/C-durakkord_reinstemt+temp+pyt_arpeggio.doc

Me har no studert forskjellane mellom dei ulike skalaene på eit reint teoretisk grunnlag, og me har fått høyre nokre praktiske døme gjennom å lytte til lydfilene. Det vil då vere interessant å lese korleis eit par av ”dei gamle meistrane” oppfatta forskjellane mellom dei ulike skalaene og kvalitetane til desse:

Helmholtz uttrykker det slik: *”But it must not be imagined that the difference between tempered and just intonation*[12] *is a mere mathematical subtilty without any practical value. That this difference is really very striking even to unmusical ears, is shewn immediately by actual experiments with properly tuned instruments.”* Helmholtz (1954: 320).

Og han seier vidare: *“As regards musical effect, the difference between the just and the equally-tempered, or the just and the Pythagorean intonations, is very remarkable. The justly-intoned chords, in favourable positions, notwithstanding the rather piercing quality of the tone of the vibrators, possess a full and as it were saturated harmoniousness; they flow on, with a full stream, calm and smooth, without tremor or beat. Equally-tempered or Pythagorean chords sound beside them rough, dull, trembling, restless. The difference is so marked that every one, whether he is musically cultivated or not, observes it at once, ... The difference between natural and tempered intonation is greatest and most unpleasant in the higher Octaves of the scale, because here the false combinational tones of the tempered intonation are more observable, and the number of beats from equal differences of pitch becomes larger, and hence the roughness greater”* Helmholtz (1954: 319).

Eivind Groven er av same oppfatning og gjev følgjande bokstavleg talt billedlege karakteristikk: *”Den store forskjell på inntrykket av renstemt og temperert musikk er av rent estetisk natur. De tempererte eller tilnærmet tempererte klanger fordunkler eller forpurrer inntrykket av musikken på samme vis som en uren, ujevn glassrute virker forstyrrende å se gjennom. Enhver kan forvisse seg om dette ved å se ut på et vakkert landskap gjennom en slik rute, og etterpå legge merke til hvor befriende for øyet det er når en tar vekk ruta. Landskapet trer med en gang rolig og klart fram for øyet. Synssansen får hvile ut i en rolig friksjonsfri kontakt med landskapet. Presis det samme opplever en ved sammenligning av et musikkstykke spilt på et temperert, og etterpå på et renstemt instrument. Skurringene og svevningene i det tempererte svarer til urenheten og ujevnheten i glasset. Straks en kommer over i det renstemte er det som å se gjennom klar luft.”* Groven (1948: 81).

”Selv om vårt øre eller vår følelse til en viss grad kan venne seg til de urene 12-tempererte intervaller, kan en ikke se bort fra den psykiske forstyrrelse eller uro, som i det lange løp skader musikerens nerver, og dertil avskjærer tilhøreren de fulle skjønnhetsinntrykk og den fulle nytelse av musikk. Svevningene fremkaller en egen surr eller larmende bilyd som gir et grøtet inntrykk. En renstemt akkord derimot er velgjørende klar og rolig.
Særlig fremtredende blir, som en skjønner svevningene på 12-tempererte instrumenter når en slår an akkorder i dypt leie og med tett harmoni. Her har overtonene sterkest anledning til å gjøre seg gjeldende.” (Groven, 1948: 15).

I praksis er me omgitt av musikk frå instrument som er stemt meir eller mindre nøyaktig etter den tempererte skala. Elektroniske instrument som til dømes el-piano og el-orgel vil i utgangspunktet vere stemt nøyaktig etter den tempererte skala. Mekaniske instrument som alle strenginstrument, tradisjonelle piano og orgel, må med jamne mellomrom stemmast. Stemminga kan gjerast enten etter gehør eller ved hjelp av elektroniske stemmeapparat.

---

[12] Just intonation = reinstemt skala = naturtoneskala

Målingar som er gjort av Grützmacher og Lottermoser på tre nystemte kvalitetsflygel og to orgel, stemt etter gehør av ulike stemmarar, syner ein relativt stor variasjon i høve til den tempererte skalaen (her presentert etter Groven, 1948: 15 – 21). Sjå tabell 4. Verdiane i tabellen er omrekna frå "millioktav", slik dei er presenterte av Groven, til cents av meg.

Tabell 4:

	Klaver		Orgel		Temperert
	Lågaste verdi	Høgaste verdi	Lågaste verdi	Høgaste verdi	
Halvtone	86,6	112,9	96,3	106,8	100
Stor ters	389,0	413,0	395,3	406,1	400
Kvint	685,6	711,4	693,6	705,1	700
Oktav	1189,4	1215,5	1193,3	1205,4	1200

Tabellen viser variasjonar i målte verdiar for nystemte instrument.

Me ser at variasjonane for dei einskilde intervalla er store. Samanliknar ein verdiane i denne tabellen med verdiane i tabell 3, ser ein til dømes at den store tersen varierer frå nesten reinstemt (386 cents), til 5 cents over den pytagoreiske (408 cents). Dei mest overraskande resultata er etter mitt syn dei store avvika ein finn for oktaven. Ein skulle tru at det var relativt lett å stemme dette intervallet nøyaktig. Men det viser seg i følgje Groven at store intervall generelt er vanskelege å stemme. Målingar viser at det intervallet som er lettast å stemme nøyaktig er den store tersen.
Vidare registrerer me eit markert større avvik på klavera enn på orgla. Dette kan skuldast at det under stemming er lettare å akseptere ein unøyaktig samklang mellom dei relativt kortvarige klavertonane enn dei meir kontinuerlige orgeltonane. I tillegg kjem reint tekniske tilhøve ved stemminga inn, som til dømes at ein ved klaverstemming helst vil unngå å slakke ned ein tone som er blitt litt for høg, fordi denne då gjerne vil fortsette å synke litt i ettertid. To av flygla vart stemt rett etter kvarandre av den same stemmaren. Det andre vart meir unøyaktig stemt enn det første, kanskje rett og slett fordi stemmaren var meir opplagd då han stemte det første?

Me skal ikkje gå meir i detalj på dette, men konkludere med Groven sine ord: *"Og en kan derfor regne med at vi i virkeligheten i klavermusikk hører alle mulige slags intervaller, både rene, 12-tempererte, 31-tempererte og pytagoreiske, og aller helst intervaller som ligger utenfor disse."* Groven (1948: 22).

Avslutning

Me har no sett på oppbygginga av tre ulike skaltypar ut frå eit matematisk perspektiv. Me har studert forskjellane mellom dei ulike skalaene i eit teoretisk perspektiv ved blant anna bruk av forholdstal og ved å rekne intervalla om til cents og samanlikne talverdiane. Ved å presentere dei ulike skalaene og eit utval av intervall som lydfiler har me overlete til den einskilde lesar/lyttar sjølv å avgjere kor store forskjellane mellom dei ulike skalaene er i hans/hennar øyre.
Etter at ein no har tileigna seg den kunnskapen som dette arbeidet omhandlar, er det mange nye tankar og spørsmål som melder seg. Eit prosjekt som det ville vere interessant å gå i gang med, er til dømes å studere ulike instrument si oppbygging eller stemming i høve til ulike skalatypar.

Litteraturliste

Benestad, Finn: *Musikklære.* Tano, Oslo 1991

Bjørklund, Alf og Fintoft, Knut: *Elementær musikalsk akustikk*. Aschehoug, Oslo 1966

Caplex. Cappelens ettbinds leksikon. Cappelens Forlag, Oslo 1990

Ellis, Alexander J.: "Appendix XX, Additions by the Translator." I Helmholtz, Hermann: *On the Sensations of Tone.* (s. 430 – 556) Dover Publications Inc., New York 1954

Ellis, Alexander J.: "Fotnotar s. 147, 279". I Helmholtz, Hermann: *On the Sensations of Tone.* Dover Publications Inc., New York 1954

Groven, Eivind: *Naturskalaen. Tonale lover i norsk folkemusikk bundne til seljefløyta,* Norsk folkekulturs forlag. Skien 1927. Trykt i "Norsk Folkekultur, 13 – 15, 1927 – 1929" Bergens Museum.

Groven, Eivind: *Temperering og renstemning,* Dreyers Forlag, Oslo 1948

Helmholtz, Hermann: *On the Sensations of Tone*. Dover Publications Inc., New York 1954

Holtsmark, Torger: *Pythagoras og verdens harmoni*. 21/11-98. Programserien P2-akademiets foredrag. Kulturredaksjonen NRK P2, Oslo 1998

Partch, Harry: *Genesis of a Music*. Da Capo Press, New York 1974

Tennent, R.M. (red.): *Science Data Book.* Oliver & Boyd, Edinburgh 1976

Appendiks

Tabell A1:

Notenamn:	Intervallnamn:	Reinstemt skala	Temperert skala	Pytagoreisk skala
c	Prim	1 : 1	1 : 1	1 : 1
c#	Liten sekund	1 : 16/15	$1 : 1\cdot 2^{1/12}$	1 : 2187/2048
d	Stor sekund	1 : 9/8	$1 : 1\cdot 2^{2/12}$	1 : 9/8
d#	Liten ters	1 : 6/5	$1 : 1\cdot 2^{3/12}$	1 : 19683/16384
e	Stor ters	1 : 5/4	$1 : 1\cdot 2^{4/12}$	1 : 81/64
f	Kvart	1 : 4/3	$1 : 1\cdot 2^{5/12}$	1 : 4/3
f#	Tritonus[13]	1 : 7/5	$1 : 1\cdot 2^{6/12}$	1 : 729/512
g	Kvint	1 : 3/2	$1 : 1\cdot 2^{7/12}$	1 : 3/2
g#	Liten sekst	1 : 8/5	$1 : 1\cdot 2^{8/12}$	1 : 6561/4096
a	Stor sekst	1 : 5/3	$1 : 1\cdot 2^{9/12}$	1 : 27/16
a#	Liten septim	1 : 16/9	$1 : 1\cdot 2^{10/12}$	1 : 59049/32768
h	Stor septim	1 : 15/8	$1 : 1\cdot 2^{11/12}$	1 : 243/128
c^1	Oktav	1 : 2	1 : 2	1 : 2

Tabellen viser forholdstala for intervall relatert til ein grunntone innanfor ein oktav for temperert skala og utdrag[14] frå reinstemt og pytagoreisk skala. Tolvte rota av to, $^{12}\sqrt{2}$, er her skriven som $2^{1/12}$, og vidare er $(^{12}\sqrt{2})^2$ skriven som $2^{2/12}$ og $(^{12}\sqrt{2})^3$ er skriven som $2^{3/2}$ og så vidare oppover.

[13] Ordet "tritonus" vert brukt i musikkteorien som synonym til forstørra kvart/forminska kvint, og verkar sjølvforklarande ved at dette intervallet inneheld tre heile tonesteg.
[14] Både reinstemt og pytagoreisk skala inneheld langt fleire intervall/tonar innanfor oktaven, men desse intervalla er valde ut fordi dei korresponderer, om enn i ulik grad, med den tempererte skalaen sine intervall bygd på heile og halve tonar.

Tabell A2	C-durskala frå og med store oktav opp til og med tostrøken oktav					
"Tolvte-rot-av-2":		1,059463094				
Notenamn:	"Utdrag av		"Utdrag av			
	reinstemt"	Temperert	Pytagoreisk"			
	[Hz]	[Hz]	[Hz]			
C	66,00	65,41	66,00		Prim	
C#	70,40	69,30	70,48		Liten sekund	
D	74,25	73,42	74,25		Stor sekund	
D#	79,20	77,78	79,29		Liten ters	
E	82,50	82,41	83,53		Stor ters	
F	88,00	87,31	88,00		Kvart	
F#	92,40	92,50	93,97		Tritonus	
G	99,00	98,00	99,00		Kvint	
G#	105,60	103,83	105,72		Liten sekst	
A	110,00	110,00	111,38		Stor sekst	
A#	117,33	116,54	118,93		Liten septim	
H	123,75	123,47	125,30		Stor septim	
c	132,00	130,81	132,00		Oktav/prim	
c#	140,80	138,59	140,96		Liten sekund	
d	148,50	146,83	148,50		Stor sekund	
d#	158,40	155,56	158,58		Liten ters	
e	165,00	164,81	167,06		Stor ters	
f	176,00	174,61	176,00		Kvart	
f#	184,80	185,00	187,95		Tritonus	
g	198,00	196,00	198,00		Kvint	
g#	211,20	207,65	211,44		Liten sekst	
a	220,00	220,00	222,75		Stor sekst	
a#	234,67	233,08	237,87		Liten septim	
h	247,50	246,94	250,59		Stor septim	
c'	264,00	261,63	264,00		Oktav/prim	
c#'	281,60	277,18	281,92		Liten sekund	
d'	297,00	293,66	297,00		Stor sekund	
d#'	316,80	311,13	317,16		Liten ters	
e'	330,00	329,63	334,13		Stor ters	
f'	352,00	349,23	352,00		Kvart	
f#'	369,60	369,99	375,89		Tritonus	
g'	396,00	392,00	396,00		Kvint	
g#'	422,40	415,30	422,88		Liten sekst	
a'	440,00	440,00	445,50		Stor sekst	
a#'	469,33	466,16	475,74		Liten septim	
h'	495,00	493,88	501,19		Stor septim	
c''	528,00	523,25	528,00		Oktav/prim	
c#''	563,20	554,37	563,84		Liten sekund	
d''	594,00	587,33	594,00		Stor sekund	
d#''	633,60	622,25	634,32		Liten ters	
e''	660,00	659,26	668,25		Stor ters	
f''	704,00	698,46	704,00		Kvart	
f#''	739,20	739,99	751,78		Tritonus	
g''	792,00	783,99	792,00		Kvint	
g#''	844,80	830,61	845,75		Liten sekst	
a''	880,00	880,00	891,00		Stor sekst	
a#''	938,67	932,33	951,47		Liten septim	
h''	990,00	987,77	1002,38		Stor septim	
c'''	1056,00	1046,50	1056,00		Oktav/prim	

Tabell **A3** C-durskala med korrigert startpunkt for reinstemt- og pytagoreisk skala													
	Grunntonen c i den "reinstemte" og den "Pytagoreiske skalaen" er flytta frå 132 til 130,81Hz, for å få dei to skalaene til å starte likt, og dermed gjere												
	samanlikning enklare. Dette fører til at a' ikkje treff på kammertonen 440Hz i desse to skalaene.												
	Korrigert	1,19			"Tolvte-rot-av-2":		1,059463094						
Note-	"Reinstemt"	Temperert	Pytagoreisk		Intervall i høve til		"Reinstemt"	Temperert	Differanse		"Reinstemt"	Temperert	Differanse
namn:	[Hz]	[Hz]	[Hz]		grunntonen c:		[Hz]	[Hz]	Reinst-temp		[Cents]	[Cents]	Reinst-temp
									[Hz]				[Cents]
1C	32,70	32,70	32,70		Prim		0,00	0,00	0,00		0,0	0,0	0,0
1C#	34,88	34,65	34,92		Liten sekund		2,18	1,94	0,24		111,7	100,0	11,7
1D	36,79	36,71	36,79		Stor sekund		4,09	4,00	0,08		203,9	200,0	3,9
1D#	39,24	38,89	39,29		Liten ters		6,54	6,19	0,35		315,6	300,0	15,6
1E	40,88	41,20	41,39		Stor ters		8,18	8,50	-0,32		386,3	400,0	-13,7
1F	43,60	43,65	43,60		Kvart		10,90	10,95	-0,05		498,0	500,0	-2,0
1F#	45,78	46,25	46,56		Tritonus		13,08	13,55	-0,46		582,5	600,0	-17,5
1G	49,05	49,00	49,05		Kvint		16,35	16,30	0,06		702,0	700,0	2,0
1G#	52,33	51,91	52,38		Liten sekst		19,62	19,21	0,41		813,7	800,0	13,7
1A	54,51	55,00	55,19		Stor sekst		21,80	22,30	-0,49		884,4	900,0	-15,6
1A#	58,14	58,27	58,93		Liten septim		25,44	25,57	-0,13		996,1	1000,0	-3,9
1H	61,32	61,74	62,08		Stor septim		28,62	29,03	-0,42		1088,3	1100,0	-11,7
C	65,41	65,41	65,41		Oktav/Prim		0,00	0,00	0,00		1200,0	1200,0	0,0
C#	69,77	69,30	69,85		Liten sekund		4,36	3,89	0,47		111,7	100,0	11,7
D	73,58	73,42	73,58		Stor sekund		8,18	8,01	0,17		203,9	200,0	3,9
D#	78,49	77,78	78,58		Liten ters		13,08	12,38	0,71		315,6	300,0	15,6
E	81,76	82,41	82,78		Stor ters		16,35	17,00	-0,65		386,3	400,0	-13,7
F	87,21	87,31	87,21		Kvart		21,80	21,90	-0,10		498,0	500,0	-2,0
F#	91,57	92,50	93,13		Tritonus		26,16	27,09	-0,93		582,5	600,0	-17,5
G	98,11	98,00	98,11		Kvint		32,70	32,59	0,11		702,0	700,0	2,0
G#	104,65	103,83	104,77		Liten sekst		39,24	38,42	0,82		813,7	800,0	13,7
A	109,01	110,00	110,37		Stor sekst		43,60	44,59	-0,99		884,4	900,0	-15,6
A#	116,28	116,54	117,86		Liten septim		50,87	51,13	-0,26		996,1	1000,0	-3,9
H	122,64	123,47	124,17		Stor septim		57,23	58,06	-0,83		1088,3	1100,0	-11,7
c	130,81	130,81	130,81		Oktav/Prim		65,41	65,41	0,00		1200,0	1200,0	0,0
c#	139,53	138,59	139,69		Liten sekund		8,72	7,78	0,94		111,7	100,0	11,7
d	147,16	146,83	147,16		Stor sekund		16,35	16,02	0,33		203,9	200,0	3,9
d#	156,98	155,56	157,15		Liten ters		26,16	24,75	1,41		315,6	300,0	15,6
e	163,52	164,81	165,56		Stor ters		32,70	34,00	-1,30		386,3	400,0	-13,7
f	174,42	174,61	174,42		Kvart		43,60	43,80	-0,20		498,0	500,0	-2,0
f#	183,14	185,00	186,25		Tritonus		52,33	54,18	-1,86		582,5	600,0	-17,5
g	196,22	196,00	196,22		Kvint		65,41	65,18	0,22		702,0	700,0	2,0
g#	209,30	207,65	209,54		Liten sekst		78,49	76,84	1,65		813,7	800,0	13,7
a	218,02	220,00	220,75		Stor sekst		87,21	89,19	-1,98		884,4	900,0	-15,6
a#	232,56	233,08	235,73		Liten septim		101,74	102,27	-0,53		996,1	1000,0	-3,9
h	245,27	246,94	248,34		Stor septim		114,46	116,13	-1,67		1088,3	1100,0	-11,7
c'	261,63	261,63	261,63		Oktav/Prim		130,81	130,81	0,00		1200,0	1200,0	0,0
c#'	279,07	277,18	279,38		Liten sekund		17,44	15,56	1,88		111,7	100,0	11,7
d'	294,33	293,66	294,33		Stor sekund		32,70	32,04	0,66		203,9	200,0	3,9
d#'	313,95	311,13	314,31		Liten ters		52,33	49,50	2,82		315,6	300,0	15,6
e'	327,03	329,63	331,12		Stor ters		65,41	68,00	-2,60		386,3	400,0	-13,7
f'	348,83	349,23	348,83		Kvart		87,21	87,60	-0,39		498,0	500,0	-2,0
f#'	366,28	369,99	372,51		Tritonus		104,65	108,37	-3,72		582,5	600,0	-17,5
g'	392,44	392,00	392,44		Kvint		130,81	130,37	0,44		702,0	700,0	2,0
g#'	418,60	415,30	419,07		Liten sekst		156,98	153,68	3,30		813,7	800,0	13,7
a'	436,04	440,00	441,49		Stor sekst		174,42	178,37	-3,96		884,4	900,0	-15,6
a#'	465,11	466,16	471,46		Liten septim		203,49	204,54	-1,05		996,1	1000,0	-3,9
h'	490,55	493,88	496,68		Stor septim		228,92	232,26	-3,34		1088,3	1100,0	-11,7
c''	523,25	523,25	523,25		Oktav/Prim		261,63	261,63	0,00		1200,0	1200,0	0,0
c#''	558,13	554,37	558,76		Liten sekund		34,88	31,11	3,77		111,7	100,0	11,7
d''	588,66	587,33	588,66		Stor sekund		65,41	64,08	1,33		203,9	200,0	3,9
d#''	627,90	622,25	628,61		Liten ters		104,65	99,00	5,65		315,6	300,0	15,6
e''	654,06	659,26	662,24		Stor ters		130,81	136,00	-5,19		386,3	400,0	-13,7
f''	697,67	698,46	697,67		Kvart		174,42	175,21	-0,79		498,0	500,0	-2,0
f#''	732,55	739,99	745,02		Tritonus		209,30	216,74	-7,44		582,5	600,0	-17,5
g''	784,88	783,99	784,88		Kvint		261,63	260,74	0,89		702,0	700,0	2,0
g#''	837,20	830,61	838,15		Liten sekst		313,95	307,36	6,59		813,7	800,0	13,7
a''	872,09	880,00	882,99		Stor sekst		348,83	356,75	-7,91		884,4	900,0	-15,6
a#''	930,22	932,33	942,92		Liten septim		406,97	409,08	-2,10		996,1	1000,0	-3,9
h''	981,10	987,77	993,36		Stor septim		457,84	464,52	-6,67		1088,3	1100,0	-11,7
c'''	1046,50	1046,50	1046,50		Oktav/Prim		523,25	523,25	0,00		1200,0	1200,0	0,0