Matematisk problemløsning på småskolen

«Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av matematisk problemløsning på småskolen?»

Vilde Emilie Sæth Sandø

Undervisning og læring

2019

Antall ord: 33245

HØGSKULEN I VOLDA

«Jeg har vel bare tenkt at det er den måten alle tenker på. Også viser det seg jo at nei, det er det jo ikke, det er jo hundrevis av måter de tenker på».

Emilie

HØGSKULEN I VOLDA

FORORD

Da var tiden endelig kommet, og masteroppgaven er ferdigstilt. Dette har vært en lang og krevende prosess som har ført med seg mye frustrasjon, spenning, forvirring, glede, irritasjon og nysgjerrighet. Ikke minst har jeg gjennom arbeidet med denne oppgaven blitt motivert, glad og full av forventning når jeg nå skal ut i arbeidslivet og selv få erfare hvordan jeg kan undervise gjennom matematisk problemløsning.

Den siste innspurten på oppgaven har vært ubeskrivelig brutal, men endelig er jeg i havn- endelig skal oppgaven leveres og vurderes! Før jeg gir meg må jeg likevel utbringe en stor takk til alle som har gjort dette forskningsarbeidet mulig for meg å gjennomføre.

Jeg vil takke barna mine, som til tross for et ønske om å få rive arbeidsrommet mitt, likevel har vært tålmodige og vist forståelse. Jeg vil også takke venner og familie som har stilt opp som trillehjelp og barnevakt for å gi meg tid til å arbeide. En ekstra stor takk må her gis til mamma og pappa, som i tillegg til å passe unger, har laget og kommet med mat til meg, slik at jeg også har fått litt næring. Videre vil jeg takke mannen min, som til tross for å utgi seg for å være hakket mer lei enn meg, ikke har søkt om skilsmisse, men derimot har bitt tennerne sammen, vasket, ryddet, stelt unger, laget mat og holdt huset stående.

For at oppgaven i det hele tatt har blitt noe av, må jeg også gi en stor takk til veilederne mine, Ingeborg Katrin Berget og Bjørn Smestad. I tillegg til å gi raske tilbakemeldinger og hjelp med å finne informanter, har de gitt meg pågangsmot og konstruktiv veiledning som har ført meg videre i arbeidet.

Den største takken må jeg likevel gi til informantene mine, som til tross for en travel hverdag tok seg tid til å la seg intervjue, og som slapp meg inn i klasserommet for å observere undervisningen sin. Uten dere kunne det ikke blitt noen oppgave!

Endelig er tiden kommet for å levere; tusen takk!

Veblungsnes, 3. juni 2019

Vilde E. S. Sandø

ABSTRACT

Even though there already exists a lot of theory showing the advantages of mathematical problem solving, and that problem solving is becoming more emphasized in the curriculum, this particular teaching method requires a lot of work from the instructor and is often deprioritized. In this study I look at what mathematical problem solving at the elementary school level requires from the instructor. Thus, my thesis/topicquestion is as follows:

> *"How can instructors teach using mathematical problem solving at the elementary school level?"*

In order to answer this thesis, I have constructed six research questions to focus on throughout my study. These questions were constructed based on the three-part model of the problem solving process laid forth by Mason, Burton, and Stacey (2010). The main focus in this theory is based on the instructor's work, but it also focuses on different phases in the problem solving process and the question of why problem solving is important.

In order to collect empirical data I used the method of qualitative cross-sectional design. Primarily, my data comes from the five semi-structured interviews I did with five elementary school (1stgrade through 4thgrade) instructors. However, I also observed six double period classes from the instructors where one of the instructors let me observe their teaching in two different grades. This allowed me to gain a more meaningful insight in how to work with mathematical problem solving in the 1st, 2nd, 3rd, and 4th grades.

The section on analysis and discussion is divided in a way to keep the research questions in focus. The results section answers the topic question through the findings in the discussion.

HØGSKULEN
I VOLDA

SAMMENDRAG

Til tross for at det allerede finnes mye teori som peker på gevinstene ved å arbeide med matematisk problemløsning, samt at problemløsning stadig får en tydeligere plass i læreplanen, er dette en undervisningsmåte som krever mye av læreren og som ofte prioriteres ned. I denne studien har jeg forsket på hva problemløsningsarbeid i matematikken på småskolen krever av læreren. Dette har jeg gjort med følgende problemstilling:

> *«Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av matematisk problemløsning på småskolen?»*

For å svare på denne problemstillingen har jeg konstruert seks forskningsspørsmål som jeg har fokusert på gjennom arbeidet. Disse forskningsspørsmålene har jeg funnet med utgangspunkt iblant annet Mason, Burton og Staceys (2010) tredelte modell av problemløsningsprosessen. Hovedfokuset i teorigrunnlaget er basert på lærerens arbeid, men også på ulike faser i problemløsningsprosessen og hvorfor problemløsning er viktig.

Metoden jeg har brukt til å samle inn empiri, er et kvalitativ tverrsnittdesign. Datamaterialet er hovedsakelig bygd på fem semistrukturerte intervjuer av fem lærere på 1.-4. trinn, men jeg har også observert seks dobbelttimer i undervisningen deres, da jeg hos den ene læreren fikk observere undervisning på to forskjellige trinn. Dette har bidratt til å gi et dypere innblikk i hvordan man kan arbeide med matematisk problemløsning på småskolen.

Analyse og drøftingskapittelet er inndelt med fokus på å besvare forskningsspørsmålene jeg satt for oppgaven. I resultatkapittelet svarer jeg på problemstillingen gjennom hovedfunnene i drøftingen.

Innholdsfortegnelse

KAPITTEL 1: Innledning

Matematikk blir ofte, og spesielt av de som synes det er vanskelig og uinteressant, sett på som en rekke formler og regler som må pugges. Dette er et inntrykk vi ifølge Lampert (1990) pådrar oss gjennom å bli utsatt for en tradisjonell undervisning hvor læreren og læreboken har alle svar og fremgangsmåter. Ifølge Boaler (2009) kan matematikk på denne måten være det mest ødeleggende faget for elevenes selvtillit ved at det gjennom slik undervisning ofte vil få dem til å føle seg dumme og hjelpeløse. Dette er noe som igjen kan føre med seg unnvikelse og forhindre læring av viktige metoder og arbeidsmåter i lang tid (Boaler, 2009).

Fra min tid på barneskolen, husker jeg godt at det vanskeligste med matematikken var tenke på den måten læreren ville jeg skulle tenke, da jeg var redd for å bli tatt for å jukse dersom jeg brukte en annen fremgangsmåte enn den som var ment. Når jeg nå ser tilbake på dette, skjønner jeg at mine bekymringer ikke hadde noe fornuftig grunnlag, men likevel tenker jeg; noe må ha blitt gjort for at jeg skulle få denne oppfatningen. Heldigvis for meg har jeg alltid interessert meg for, og likt matematikk. Jeg har brynt meg på hvorfor ting er som de er og gjennom dette tilegnet meg forståelse for hva jeg gjør. Grunnen til dette tror jeg nok kan ligge i at jeg både har foreldre og eldre søsken som liker matematikk og behersker det svært godt. Men hva om de som ikke har foreldre eller søsken som interesserer seg for matematikk, har samme oppfatning som jeg hadde om at læreren kan den ene rette måten og det eneste rette svaret? Vil de klare å tilegne seg lærerens tankegang, eller vil de få en oppfatning av at «*matematikk er for vanskelig for meg*»?

Dersom man har en oppfatning av at evner ikke kan endres, og på denne måten tror man for eksempel enten er god i matte eller dårlig i matte, har man ifølge Wæge og Nosrati (2018) det som kalles et statisk tankesett. Å ha et statisk tankesett virker igjen ødeleggende for blant annet både utvikling av evner og selvtillit (Wæge og Nosrati, 2018). Det at elevene utvikler et slikt tankesett er dermed noe man som lærer må forsøke å forhindre, gjennom å verdsette innsats, pågangsmot og egen tenkning, fremfor raske svar fra forutbestemte løsningsmetoder. Selv har jeg gjennom min tid som elev selv, men også gjennom vikararbeid og praksis, opplevd mange eksempler på både barn og voksne med et slikt statisk tankesett. Jeg ønsker å forhindre at mine fremtidige elever utvikler et slikt dankesett og vil derfor, gjennom dette forskningsprosjektet, prøve å finne ut mer om undervisning som fremmer fokus på elevenes forståelse og selvstendige tankegang i matematikk.

Selv tror jeg at tidlig innsats er viktig for å få lagt et godt grunnlag med gode holdninger og normer i klasserommet, som senere vil bidra til et godt miljø for læring og utvikling. Når det kommer til matematisk problemløsning, tenker jeg at dette er noe elevene som starter på skolen allerede er eksperter på fordi de har så mye erfaring med dette fra hverdagslivet i barnehagen og hjemme. Mye er nytt for små barn, og de møter derfor stadig nye «problemer» i hverdagen som de må ta stilling til og løse ut ifra de erfaringene og kunnskapene de har fra før. Som mor til en jente på snart 3 år får jeg stadig observere hvordan hun kommer opp i nye situasjoner og må tenke «nytt» og utforsker for å finne svar og gode løsninger. Å prøve og feile er en populær strategi for både jenta mi og mange andre små barn, fordi de er nysgjerrige og liker utforsking. Fordi jeg mener dette er et utrolig bra utgangspunkt for læring, er dette er noe jeg ønsker å holde fast ved også når barna blir elever på skolen.

1.1 Problemstilling og forskningsspørsmål

Høsten 2016 studerte jeg emnet *ULMA303; problemløsning og modellering.* Dette gav meg et innblikk i teorien bak hvorfor vi bør arbeide med problemløsningsoppgaver i matematikken, men også hvordan man i teorien bør gå frem ved slik undervisning. Til tross for dette er det fortsatt uklart for meg hvordan man i praksis kan arbeide på denne måten. Med dette som bakgrunn, er min problemstilling følgende:

«Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av matematisk problemløsning på småskolen?»

Jeg valgte å forholde meg til lærerens arbeid fordi dette er det jeg ser på som mest betydningsfullt å få kunnskap om for at jeg selv som fremtidig lærer skal kunne undervise gjennom problemløsning. Med dette som utgangspunkt ønsker jeg å finne ut hva lærene jeg får som informanter synes er utfordrende, hvilke erfaringer de har med dette arbeidet og hva de selv mener er viktig å fokusere på ved slik undervisning. I tillegg til dette ønsker jeg også å få et innblikk i hvordan man som lærer faktisk kan arbeide med dette i praksis.

1.2 Begrepsforklaring

1.2.1 Matematisk problemløsning

I mitt forskningsarbeid har jeg valgt å ta utgangspunkt i definisjonen Boesen har av et problem i sin doktoravhandling:

> *«[...] a task in which she or he doesn't know how to proceed and no complete known solution procedure [...]»* (Boesen, 2006, s. 31)

Ut ifra denne definisjonen tolker jeg et matematisk problem som en oppgave hvor problemløseren ikke kjenner en komplett løsningsprosedyre, eller en måte å gå frem for å løse oppgaven. Selv om problemløseren besitter de kunnskapene han trenger for å løse problemet vil det på denne måten ikke være klart for han, nettopp fordi kunnskapen må anvendes i en ny situasjon, på en annen måte, eller i kombinasjon med annen kunnskap. *Matematisk problemløsning* definerer jeg videre som løsning av et slikt matematisk problem.

1.2.3 Undervise

Med undervisning mener jeg her det arbeidet læreren gjør som gjennom problemløsningsøkten, samt helt nødvendig forberedelse, som i dette tilfelle er valg av problemløsningsoppgave.

1.3 Forskningsspørsmål

Tidligere forskning har gitt mange fremstillinger av problemløsningens faser, og blant disse finner vi blant annet Mason, Burton og Staceys (2010) inndeling bestående av følgene tre faser: «*Entry*», «*Attack*» og «*Review*». For å kunne belyse lærerens arbeid med problemløsning ser jeg det som nødvendig å komme nærmere inn på de forskjellige fasene i problemløsningsarbeidet, og har med grunnlag i Mason m.fl. (2010) sin tredeling, laget tre forskningsspørsmål for å belyse disse fasene (forskningsspørsmål 2, 3 og 4). Videre ser jeg det også nødvendig og si noe om hvor lang erfaring informantene har med undervisning i problemløsning og hvordan han begynte å undervise på denne måten (derav forskningsspørsmål 1). Jeg har også valgt å ta med et forskningsspørsmål om utfordringer og et om hva læreren ser på som viktig i dette arbeidet. Dette resulterte i følgende seks forskningsspørsmål:

1) *Har læreren alltid brukt problemløsning, begynte han plutselig med det eller har det vært et gradvis arbeid?*
2) *Hvordan introduserer og starter læreren arbeidet med problemløsning?*
3) *Hvordan hjelper han elevene når de trenger hjelp underveis?*
4) *Hvordan avslutter læreren en problemløsningsoppgave?*

5) *Hva er det læreren selv mener er viktig for å lykkes med å bruke problemløsning i matematikkundervisningen?*
6) *Hva er utfordringene med dette arbeidet?*

For å finne svar på problemstillingen min har jeg hovedsakelig valgt å holde fokus på disse seks forskningsspørsmålene.

1.4 Målet med forskningsarbeidet

Det finnes allerede mye teori og forsking som peker på fordelene og gevinstene ved å arbeide med matematisk problemløsning (Polya 1945; Lampart 1990; Schoenfeld 1992; Ollerton 2001; Grevholm, 2013). Ifølge Grevholm (2013) vil tilegnelse av problemløsningsferdigheter blant annet bidra til å gjøre det lettere å anvende matematikken i hverdagslivet.

Hovedmålet med forskningsarbeidet mitt har vært å få en bedre forståelse og mere kunnskap om hvordan man som lærer kan undervise ved bruk matematisk problemløsning fra tidlig skolealder. For å svare på dette har jeg, som forklart i forrige delkapittel, konstruert meg seks forskningsspørsmål som vil bringe meg til en besvarelse på hvordan dette arbeidet kan gjennomføres.Gjennom mitt forskningsarbeid ønsker jeg også å både utvide egen forståelse for, og kunnskaper om problemløsning, samtidig som jeg håper å finne en konkret fremgangsmåte for hvordan man i praksis kan arbeide med matematisk problemløsning på småskolen.

1.5 Valg av metode

For å vite hvordan man best skal finne svar på noe må man selvsagt vite hva man søker svar på. Ifølge Hjardemaal og Tveit (2011, s. 20) bør man la valget av metode avgjøres med tanke på problemstillingen og hva den eventuelle metoden kan tilby denne, fremfor å la valget stå på et vitenskapsfilosofisk grunnlag. For å finne svar på mine forskningsspørsmål på en mest hensiktsmessig måte la jeg derfor problemstillingen min til grunn når jeg skulle velge metode.

1.6 Avgrensninger

Det er mye jeg kunne skrevet om når det kommer til faktorer som spiller inn på undervisning gjennom matematisk problemløsning, men på grunn av omfanget på forskningsarbeidet må jeg et sted sette en grense for hva jeg kan ta med. Jeg har derfor valgt å ikke ta for meg generelle ting som stort sett spiller en viktig rolle i all undervisning. Dette vil si at selv om faktorer som klasseledelse, relasjonsbygging, tilpasset opplæring, mestring, tidlig innsats m.m. selvsagt spiller en viktig rolle også for denne type undervisning, har jeg valgt å ikke gå videre inn på hva dette innebærer.

KAPITTEL 2: Kunnskapsgrunnlag

2.1 Introduksjon

Som nevnt i innledningen vil man ved å arbeide med matematikk gjennom tradisjonell undervisning ifølge Lampert (1990) kunne pådra seg et inntrykk av at matematikk handler om pugging og formler. Ved å yte en slik undervisningspraksis vil man på denne måten fremme vrangforestillingen om at det å kunne matematikk handler om å kunne huske prosedyrer og gi et raskt svar til enhver matematisk oppgave. En konsekvens av tradisjonell undervisning er ifølge Lester og Lambdin (2006) at elevene etter mange års skolegang på denne måten sitter igjen med regler og formler som de knapt vet hvordan anvendes i den virkelige verden. Også Shoenfeld (1992) viser til at tradisjonell matematikkundervisning med pugging av formler og regler uten tilegnelse av noen videre forståelse eller kjennskap til hvorfor vi gjør hva, fører med seg en ødeleggende oppfatning av matematikk, som blir viktig å korrigere. Denne oppfatningen dreier seg om at elevene tror det bare er én riktig fremgangsmåte for å finne svaret og at de som er gode i matematikk løser hvilket som helst problem raskt og uten utfordring (Shoenfeld, 1992). For å unngå at elevene skal danne seg et slikt misvisende og stressfullt inntrykk av matematikken, må vi roe ned og la elevene spekulere og finne egne veier sammen med læreren.

Ifølge Lester og Lambdin (2006) er problemløsning og forståelse hovedmålene ved matematikk. De peker videre på at problemløsning og forståelse er svært nærliggende hverandre, da arbeid gjennom problemløsning gir den beste forståelsen. Matematisk problemløsning er imidlertid en kompleks arbeidsmåte som krever både innsats, vilje, mot og bevissthet fra læreren. For å få et innblikk i hva problemløsning dreier seg om, samt hvordan og hvorfor det bør arbeides med i skolen, vil jeg i dette kapittelet kaste lys på problemløsning fra flere hold. På denne måten vil jeg bevisstgjøre både meg selv og forhåpentligvis andre lærere om hvor viktig matematisk problemløsning er, samt hva det krever av oss.

Innledningsvis i dette kapittelet vil jeg presentere ulike definisjoner av matematisk problemløsning og hva som skiller slike oppgaver fra andre typer oppgaver. Her vil jeg også klargjøre hvordan jeg har valgt å definere matematisk problemløsning i mitt forskningsarbeid. Dette mener jeg er viktig for å avklare ulike forståelser av matematisk problemløsning, og for å legge en grunnleggende forståelse for hva jeg kjennetegner som arbeid med slike oppgaver.

Videre vil jeg gi en kort oversikt over problemløsningens plass i læreplanen før og nå, samt dens faktiske plass i matematikkundervisningen. Jeg vil så gå videre inn på selve problemløsningsprosessen og hvordan det tenkes at man som problemløser arbeider for å løse et problem. Etter dette vil jeg presentere noen gevinster ved å arbeide med problemløsning og hvorfor en bør arbeide med dette i skolen.

Deretter vil jeg presentere lærerens rolle ved bruk av matematisk problemløsning i undervisningen, ulike måter læreren kan arbeide på og hva som kan være viktige aspekt når en driver med matematisk problemløsning i undervisningen. Lærerens rolle i dette arbeidet er nettopp hovedfokuset i min forskning, og dette vil derfor en svært sentral del av forskningen.

Avslutningsvis i dette kapittelet vil jeg ta for meg det mer generelle aspektet som må ligge til grunn for å kunne gjennomføre matematisk problemløsning. Dette innebærer klasseledelse, relasjonsbygging og sosiomatematiske normer. Jeg ønsker å avklare om det å starte med matematisk problemløsning på småskolen har noen hensikt, og i denne avsluttende delen av teorikapittelet vil jeg derfor også fokusere på tidlig innsats.

2.3 Definisjoner av problemløsning

Det er mange oppfatninger av hva et problem er, og lærerens oppfatning av dette vil videre være avgjørende for hva som menes med problemløsning, og hvordan det undervises i det. Ifølge Grevholm (2013, ss. 207-208) er utfordringen at det ikke finnes noen felles terminologi blant lærere på hva problemløsning er. Dette vil i realiteten bety at lærere kan tro de jobber med problemløsning når de faktisk jobber med noe helt annet, som for eksempel en vanlig tekstoppgave i matematikkboken.

Schoenfeld definerer et matematisk problem på følgende måte: *«Et matematisk problem er en oppgave (a) som interesserer og engasjerer eleven og hvor han ønsker å finne en løsning, og (b) hvor eleven ikke har en lett tilgjengelig matematisk metode for å oppnå denne løsningen»* (Schoenfeld, 1989, ss. 87-88)[1]. Å løse et slikt matematisk problem dreier seg så ifølge Schoenfeld (1992) om å finne veien til et mål, fra et kjent utgangspunkt, uten å ha klart for seg hvordan man skal komme seg dit.

[1] Egen, fri oversettelse av Schoenfeld (1989)

Niss og Jensen definerer et matematisk problem som *«en spesiell type matematisk spørsmål, nemlig ett hvor en matematisk undersøkelse er nødvendig for besvarelsen»*[2] (Niss & Jensen, 2002, ss. 49-50). De peker videre på at dette er et relativt begrep. Med dette mener de at det matematiske problemet står i relasjon til den som løser det, og at det som for en person er en rutineoppgave, kan for en annen person være en problemløsningsoppgave (Niss og Jensen, 2002). Dette begrunnes med at problemløseren vil være nødt til å gjøre en matematisk undersøke for å finne en mulig løsningsmetode, mens dersom den som løser oppgaven allerede vet hvordan den kan løses, blir oppgaven en rutineoppgave.

I mitt forskningsarbeid har jeg, som sagt innledningsvis, valgt å ta utgangspunkt Boesens (2006) definisjon av et matematisk problem og følgelig også matematisk problemløsning. Ut i fra denne definisjonen finner vi at problemløsning er subjektive oppgaver, i den betydning at det er relasjonen mellom oppgaven og løseren av oppgaven som avgjør om det er en problemløsningsoppgave eller ikke. Det som er en problemløsningsoppgave for noen trenger ikke å være det for en annen (Kongelf, 2011; Björkqvist, 2001). Dette krever dermed at man som lærer må ha nære relasjoner til elevene og kjenne deres forutsetning og interesser.

Mange definisjoner av problemløsning (Polya, 1981, Schoenfeld, 1993, Mason & Davis, 1991) inkluderer også en affektiv dimensjon, hvor problemløserens følelser, motivasjon, driv og eierforhold til oppgaven også har en sentral del. Jeg ser på dette som en viktig del av oppgavene, men fordi jeg har valgt å ha et lærerfokus på mitt prosjekt, vil jeg ikke fokusere på hvordan elevene føler, tenker og opplever de ulike problemene som blir gitt. Jeg kan derfor ikke vurdere oppgavenes affektive dimensjon, og har ut ifra dette valgt å forholde meg til en definisjon av problemløsning som utelater dette som et kriterium for problemløsning.

2.3.1 Rike oppgaver

Ifølge Björkqvist (2001) er rike oppgaver ofte et godt utgangspunkt for problemløsning. Björkqvist (2001) viser til tre typer av rike oppgaver. Den første er oppgaver som motiverer mange elever samtidig som de bidrar til utviklingen av matematiske begrep. Den andre typen rike oppgaver er de som knytter matematiske og ikke-matematiske kontekster sammen og slik fremmer overføring av det som er lært. En siste type rike oppgaver er de som kobler matematiske temaer og/eller løsningsmetoder til hverandre (Björkqvist, 2001).

[2] Egen, fri oversettelse av Jensen og Niss (2002)

Wæge og Nosrati (2018) betegner rike oppgaver som oppgaver som både er oppnåelig for elever på ulike nivåer i matematikk og samtidig er kognitivt krevende. I sitt arbeid bruker Wæge og Nosrati betegnelsen *LIST-oppgaver* (lav inngangsterskel og stor takhøyde) som dekkende for rike oppgaver. At en oppgave er rik handler på denne måten om at den skal ha en lav inngangsterskel som gjør det lett for alle å vise hva de kan, samtidig som den skal ha stor takhøyde slik at elevene kan strekke seg videre innenfor oppgaven (Wæge og Nosrati, 2018). Gjennom arbeid med disse oppgavene vil alle elevene, ifølge Wæge og Nosrati (2018), få vise hva de kan og bruke egne fremgangsmåter og strategier, som igjen kan bidra til å øke elevenes indre motivasjon.

Forskjellen mellom disse to tilnærmingene til hva en rik oppgave innebærer er først og fremst at Björkvist (2001) kategoriserer de rike oppgavene i tre oppgavesorter, mens Wæge og Nosrati (2018) har en meromfattende felles betegnelse på slike oppgaver. En forskjell med disse to tilnærmingene er likevel at LIST-oppgavene som en følge av sin natur, vil kunne være rik på alle de måtene Björkqvist beskriver de rike oppgavene. Videre i dette arbeidet har jeg valgt å forholde meg til Wæge og Nosratis LIST-oppgaver, fordi disse er svært beskrivende for problemløsningsoppgavers behov for nettopp lav terskel og stor takhøyde.

En problemløsningsoppgave har altså flere likhetstrekk med rike oppgaver og et godt utgangspunkt for arbeid med problemløsning vil ofte være å starte med en rik oppgave. Slik jeg ser det er likevel problemløsning noe mer enn å få utdelt rike oppgaver, da problemløsning blant annet er individavhengig, altså avhenger av hva problemløseren kan fra før, mens en rik oppgave i langt mindre grad avhenger av elevens forutsetninger for å løse den.

2.3.2 Tekstoppgaver

Tekstoppgaver kan være problemløsningsoppgaver og det kan ikke være det. Ved å gjøre om oppgaver så de assosierer mer til dagligdagse situasjoner, som åpner for ulike tolkninger og løsninger, vil elevene straks tenke mer realistisk og utforskende (Grevholm, 2013, s. 213). Med enkle vrier på tekstoppgaver, som andre oppgaver, kan man gjøre store forskjeller, det vil her handle om hvordan oppgaven legges frem, arbeides med og om de som skal løse oppgavene vet hvordan de kan gå frem for å løse oppgaven eller ikke. En problemløsning vil ofte være en tekstoppgave, men den trenger ikke å være det.

2.2 Problemløsningens plass i skolen

Ifølge De Corte, Verschaffel og Op´t Eynde (2000, s. 687) gikk matematikkundervisningen gjennom viktige endringer på 1980- og 90-tallet. Grunnen til dette var at matematikken i løpet av denne perioden gikk fra å bli forstått som en samling abstrakte og isolerte konsept og prosedyreferdigheter som bare måtte øves på og læres, til og først og fremst handle om problemløsning og å skape mening ut fra matematisk modellering av virkeligheten (De Corte, Verschaffel, & Op´t Eynde, 2000, s. 687). Matematisk problemløsning har siden den tid verden over blitt sett på som en viktig del av arbeidet for å tilegne seg matematikkompetanse.

I M87 hadde problemløsning for første gang en tydelig plass i den norske læreplanen, og i senere læreplaner har det også hatt en integrert plass, selv om dette ikke har kommet like tydelig frem (Kongelf, 2011, s. 7). Blant de i alt fire gangene problemløsning omtales i dagens læreplan, LK06, trekkes følgende frem under formålene for «Læreplan i matematikk fellesfag»:

> *«Matematisk kompetanse innebærer å bruke problemløsning og modellering til å analysere og omforme et problem til matematisk form, løse det og vurdere hvor gyldig løsningen er»* (Kunnskapsdepartamentet, 2013, s. 1).*/UDF, 2005b, s. 1)*

Problemløsning blir på denne måten trukket fram som en nødvendig arbeidsform for å tilegne seg matematisk kompetanse. Siden det er et mål at elevene skal utvikle matematisk kompetanse, vil dette altså si at elevene også må arbeide med matematisk problemløsning. Her vises det imidlertid til problemløsning hvor man må finne og «omforme» problemet til matematisk form, og altså ikke til matematiske problemer. Kongelf (2011, ss. 16-17) viser likevel til at dette trolig ikke er ved intensjon, da det senere, under «grunnleggende ferdigheter» i læreplanen for matematikk fellesfag, legges tydelig vekt på matematiske problem:

> *«Å kunne regne i matematikk innebærer å bruke symbolspråk, matematiske begreper, fremgangsmåter og varierte strategier til problemløsning og utforsking som tar utgangspunkt både i praktiske, dagligdagse situasjoner og i matematiske problem»*
> (Kunnskapsdepartamentet, 2013, s. 4).

Her blir altså arbeid med blant annet matematisk problemløsning beskrevet som en del av det å kunne regne. Til tross for at matematisk problemløsning ifølge læreplanen skal være en del av matematikkopplæringen, viser flere tidligere studier at undervisningen ofte bygges og utføres mer på grunnlag av læreverkene enn på læreplanen (Lampert, 1990; Alseth, Breiteig, & Brekke, 2003; Kongelf, 2011). På denne måten har altså læreverkene en større påvirkningskraft på undervisningen og elevens læring enn hva læreplanen har. I sin evaluering av Reform 97 fant Alseth, Breiteig og Brekke (2003) at det i de fleste klasserom, til tross for fokus på undersøkende problemløsende aktiviteter i L97[3], var en tradisjonell matematikkundervisning, med læreboken i fokus, som regjerte. Dette kan slik sett tyde på at undervisningspraksis er vanskelig å endre.

Å få en fullstendig oversikt over læreverkene kan imidlertid være vanskelig, da vi i Norge står fritt til å skrive og gi ut læreverk. Det er likevel mulig å få en viss oversikt over hvilke læreverk som benyttes mest, og Kongelf presenterte i 2011 en analyse av seks godt etablerte læreverk og deres bruk av heuristiske metoder[4]. Det han fant var at heuristiske metoder ble brukt tilfeldig og at ingen av bøkene verken nevnte eller behandlet problemløsning eksplisitt (Kongelf, 2011, s. 5). De fleste norske lærebøker legger ifølge Kongelf (2011) i liten grad til rette for eksplisitt undervisning i problemløsing, og tar bare opp et fåtall av de vanligste metodene eller framgangsmåtene for problemløsing. Ofte blir metoder og måter å tenke på presenterte på en indirekte og implisitt måte.

I tillegg til et lite eksplisitt fokus på problemløsning i både læreplan og læreverk, kan også forståelsen av hva matematisk problemløsning er, ifølge Grevholm (2013), være svært varierende fra person til person, men også for samme person til forskjellige tider og anledninger. Grevholm (2013, s. 207) spår likevel at fremtidens matematikkundervisning i må ha mere fokus på å la elevene tilegne seg evnen til å argumentere, tenke logisk, være fleksibel og kritisk granskende, og samtidig utvikle deres kreativitet gjennom problemløsningsarbeid.

---

[3] Blant opplæringsmålene i Felles mål for faget i L97 finner vi følgende *«at elevene stimuleres til å bruke sin fantasi, sine ressurser og sine kunnskaper til å finne løsningsmetoder og -alternativer gjennom undersøkende og problemløsende aktivitet og bevisste valg av verktøy og redskaper»* (Kirke-, utdannings- og forskningsdepartementet, 1997, s. 160) https://www.nb.no/nbsok/nb/f4ce6bf9eadeb389172d939275c038bb?lang=no#159

[4] Kongelf definerer heuristiske på følgende måte (egen, fri oversettelse): *«tommelfingerregler for å lykkes med problemløsning, generelle fremgangsmåter som hjelper den enkelte med å forstå et problem bedre og/eller å skape fremgang mot løsningen»* (Kongelf, 2011, s. 12).

Den nye læreplanen som trer i kraft fra høsten 2020 er bygget opp rundt kjerneelementer bestående av fokusområdene som anses som det viktigste i hvert fag (Regjeringen, 2018). Ser vi på kjerneelementene innenfor matematikk finner vi at det første av de seks er «Utforskning og problemløsing». Videre finner vi også kjerneelementene «Modellering og anvendelser», «Resonnering og argumentasjon» og «Representasjon og kommunikasjon», som alle er tett knyttet til problemløsning. Dette viser at læreplanen, og forhåpentligvis også læreverkene i den nærmeste fremtid vil endres mot et økt fokus på problemløsning og elevenes egne tenkning og fremgangsmåter. Her vil matematikken og elevene stå i fokus, med veiledende lærere rundt seg.

2.4 Modeller av problemløsning

Problemløsing inngår i alle tema en møter i matematikken ved at det er en arbeidsform og ikke bare et tema i seg selv. Vi kan se på problemløsing som selve kjernen i matematikken, og det er som lærer derfor viktig å tilegne seg best mulig kunnskap om hvordan en kan arbeide med dette i praksis, på en fornuftig og god måte. Hva som kjennetegner en problemløsningsprosess har blitt framstilt i mange ulike modeller. Allerede i 1945 utviklet Polya en modell for å forklare denne prosessen i 4 hovedfaser. Den første fasen går ut på at man må *forstå problemet*. Den neste fasen er så å *finne en plan.* Videre skal man *gjennomføre planen*, og tilslutt må man *kontrollere* svaret ved å se tilbake på hva man har gjort og om resultatet kan gi mening i den gitte konteksten.

Schoenfeld (1992) delte problemløsning i sin modell inn i 5 faser. Man starter med et gitt problem og ut ifra dette analyserer man, for så å planlegge og utforske. Neste fase blir så å implementere det man har funnet ut, og det siste er å bekrefte om løsningen stemmer. Schoenfeld viser til at man hele tiden må gå tilbake til å analysere på nytt om planen etter utforskning viste seg å ikke stemme, noe som tilsier at det er en syklisk prosess.

Hovedforskjellen mellom disse to modellene av problemløsning er at mens Polya «gjennomfører planen» i fase tre, har Schoenfeld for denne delen av prosessen to faser, nemlig utforsking og implementering av funn. Til tross for dette er gangen i de to faseinndelingene forholdsvis like da fasene i stor grad likevel tilsvarer hverandre. En tredje modell av problemløsning er den tredelte modellen til Mason m.fl (2010), som er *Entry, Attack* og *Review*. Jeg har valgt og oversette disse fasene til *inngang, angrep* og *vurdering*, og det man finner her er at Mason m.fl (2010) altså har slått de to første fasene i Polya og Schoenfelds inndeling, til en inngangsfase hvor både det å forstå problemet og finne en plan inngår. Mason m.fl. sin inndeling av problemløsning er den har valgt å legge til grunn for problemløsningsprosessen videre i denne forskningen.

Ifølge Mason m.fl. (2010) er det, til tross for hva mange kanskje vil tro, inngangsfasen og vurderingsfasen som er de viktigste og mest avgjørende for løsningen av oppgaven. Dette er fordi måten man tolker og går i gang med oppgaven på, vil være avgjørende for hvordan man angriper den videre. I tillegg vil vår evne til å angripe oppgaven være bygget på erfaringer fra vurdering fra tidligere løste oppgaver. På denne måten er det ved vurderingsfase man ser over hva man har gjort og henter med seg erfaringsbasert kunnskap om metode og tankegang videre.

I inngangsfasen er det spesielt tre spørsmål man bør stille seg for å strukturere arbeidet. Disse er: 1) Hva vet jeg? 2) Hva vil jeg? og 3) Hva kan jeg introdusere? (Mason m.fl., 2010, s.27)[5]. Ved å ta for seg disse tre spørsmålene vil man få klart for seg utgangspunktet man har for oppgaven gjennom å strukturere den informasjonen oppgaven gir. Videre vil man ved å stille seg spørsmålet «Hva vil jeg?» få klart for seg hva man må finne ut for å løse oppgaven. Ved å så fokusere på hva man kan introdusere, eller tilføre for å løse oppgaven, som for eksempel lage en skisse, fylle inn i et diagram eller forenkle med symboler, få oversikt over oppgaven.

Angrepsfasen handler om at man gjennom inngangsfasen får ideer til hvordan man kan løse oppgaven, for så å prøve dette. Står man fast må man gå tilbake til inngangsfasen å jobbe videre der for å få nye ideer til angrepsstrategi. Dersom man kommer frem til en løsning må man så gjennom vurderingsfase for å gjennomgå hva en har gjort og sjekke løsningens holdbarhet. Kanskje skjønner man hvor feilen ligger. Ellers må man gå tilbake til inngangsfasen dersom løsningen viser seg å ikke være holdbar. Å stå fast er ifølge Mason m.fl. (2010) den beste måten å lære på, og dette er derfor bra for læringen.

I vurderingsfase bør man ifølge Mason m.fl. (2010, s. 36) *sjekke løsningen*, *reflektere over nøkkelideene og momentene i løsningen* og *utvide til en videre kontekst*[6]. Når man sjekker løsningen kan man med fordel prøve å finne en ny fremgangsmåte og presentere denne så andre forstår hva man har gjort og hvorfor. På denne måten vil man automatisk få sjekket om løsningen er holdbar. Refleksjon er videre viktig gjennom hele evalueringen, man må vite hva man har gjort og hvorfor. Ved å utvide oppgaven menes det å generalisere eller bygge videre på nye problemer som viser seg. Disse trinnene i vurderingsfase vil bidra til forståelse for hva man har gjort og hvorfor dette kunne brukes i denne sammenhengen.

[5] Egen, fri oversettelse
[6] Egen, fri oversettelse

Mason, Burton og Stacey (2010) presenterer en rekke evner en problemløser må ha for å hjelpe seg selv videre når en står fast. Disse går ut på å ikke få panikk for så å spør seg selv «hva vet jeg?», «hva vil jeg finne ut?», «hva kan jeg tilføre for å komme videre?», «skal jeg prøve med et spesialtilfelle?», «skal jeg forsøke å generalisere?» og «har jeg sett noe liknende før?». Disse spørsmålene vil kunne hjelpe deg inn på å ta i bruk ulike problemløsningsstrategier, løfte blikket og gi eleven muligheten til å se oppgaven fra nye perspektiver slik at han på denne måten kommer seg videre.

Björkquist (2007) viser til viktigheten av å gi elevene et eierforhold til oppgavene for å på denne måten kunne bidra med å gi dem en indre driv og motivasjon til å arbeide med oppgaven. I min definisjon av oppgaven har jeg bevisst valgt å utelate slike affektive trekk ved problemløseren, på grunn av at jeg har fokus på læreren og dermed ikke kan si noe om hva elevene føler. Likevel er det flere av informantene som tar opp viktigheten av eierforholdet elevene har til oppgaven, i intervjuet. Jeg har derfor tenkt å ta dette med på grunnlag av hva lærerne sier om det.

Når en skal starte arbeid med problemløsningsoppgaver er det også viktig at oppgaven har en lav «terskel» ved at den er åpen og gir alle en mulighet til å starte å arbeide med den ut ifra sine egne forutsetninger (Polya, 2009). Samtidig er et kjennetegn på problemløsningsoppgaver at elevene ikke umiddelbart vet hvordan de skal gå fram for å løse oppgaven, og det er derfor viktig at de også har lært seg ulike problemløsningsstrategier som å tegne, lage en forenklet utgave av oppgaven, prøve og feile, gjette og teste ut eller vurdere om man har gjort noe liknende tidligere (Polya, 2009; Schoenfeld 1980). For at elevene skal lære seg dette er det viktig at læreren modellerer slike fremgangsmåter for elevene.

2.5 Hvorfor problemløsning er viktig

Som jeg viste til i innledningskapittelet finnes det allerede mye teori og forsking som peker på fordelene og gevinstene ved å arbeide med problemløsning (Polya 1945; Lampart 1990; Schoenfeld 1992; Ollerton 2001; Grevholm, 2013). Ifølge Grevholm (2013) kan problemløsning sees på som selve limet i matematikken, fordi det skaper en sammenkobling fra virkeligheten og over til matematikken. Gjennom arbeid med matematisk problemløsning på skolen vil elevene tilegne seg strategier for hvordan de kan behandle problemer, hvor de ikke kjenner en umiddelbar løsningsstrategi (Grevholm, 2013). Denne kompetansen kan igjen gjøre det lettere for elevene og senere anvende matematikken i yrkes- og voksenlivet.

En del av matematikkens vesen er ifølge Grevholm (2013, s. 213) å kunne benytte flere strategier og innfallsvinkler i løsningsprosessen, samt å kunne vurdere og presentere løsningen ved hjelp av ulike uttrykksformer. Ved at elevene får være kreative å finne frem til egne løsningsstrategier er dette er noe problemløsning i aller største grad kan bidra med. Problemløsning bør ifølge Lester og Lambdin (2006) sees på som et hjelpemiddel for tilegnelse av ny kunnskap innenfor matematikk.

En annen fordel med problemløsningsarbeid er at det i større grad gir elevene muligheten til å finne egne, personlige løsninger (Grevholm, 2013). Dette vil igjen gi elevene en mulighet til å få bidra og vise hvordan de tenker og hva de kan. At elevene kommuniserer sin kunnskap på denne måten, er ifølge Grevholm (2013), igjen en sentral faktor for varig læring. Grunnen til dette er at når man må fortelle hva og hvordan man har tenkt, og på denne måten forsvare hvordan man kom frem til en løsning, blir man samtidig satt i en situasjon hvor man må reflektere over hva man faktisk gjør og hvorfor. Elevene vil på denne måten samtidig bli bevisste på hva de kan og hva de lærer. Gjennom problemløsning får elevene slik trene både sine kreative, kognitive og språklige evner (Grevholm, 2013).

I sin doktorgradsavhandling om motivasjon i matematikk fant Wæge (2007) at en relasjonell forståelse[7] ga elevene en sterkere mestringsfølelse enn hva instrumentell forståelse[8] gav. I tillegg til dette fant hun at denne følelsen av mestring og kompetanseutvikling igjen hadde en tett tilknytning til elevenes glede av faget (Wæge, 2007). Og jobbe for å gi elevene en relasjonell forståelse i matematikk blir dermed viktig i matematikkundervisningen. For å oppnå dette er det viktig at elevene får reflektere over hva de gjør og hvorfor, noe som også er et mål ved problemløsning.

En annen fordel med problemløsning er at det kan bidra til å utvikle elevenes evne til kritisk tenkning, fordi de blir vant til å se etter sammenhenger, forskjeller og likheter (Grevholm, 2013). Matematisk problemløsningsarbeid legger også til rette for at elevene får trening i å vurdere eget og medelevers arbeid (Grevholm, 2013). At elevene presenterer sine løsningsforslag for resten av klassen, gir dem også øvelse i å bruke forklarende og nødvendige begreper, samt trolig se nytten i disse. Dette vil igjen støtte både elevens egen forståelse av problemet og medelevers.

[7] Relasjonell forståelse handler om å tilegne seg kunnskap om hvordan man løser en oppgave, og hvorfor man gjør det på denne måten (Wæge og Nosrati, 2018, s. 35)
[8] Instrumentell forståelse handler om å lære seg regler for hvordan man løser en oppgave (Wæge og Nosrati, 2018, s. 35)

Å ha et dynamisk tankesett er ifølge Wæge og Nosrati (2018) noe som innebærer å ha troen på at evner kan utvikles gjennom innsats. Til motsetning av dette innebærer et statisk tankesett å ha troen på at ens evner er statiske, og dermed ikke mulig å endre. Med et slikt tankesett vil elevene derfor strebe etter å utvikle sine ferdigheter og evner. Wæge og Nosrati (2018, s. 58) presenterer syv kjenneteg på elever med et dynamisk tankesett, disse er følgende:

1) *Er opptatt av læring og forståelse*
2) *Betrakter feil som en naturlig del av læringsprosessen*
3) *Velger utfordrende oppgaver*
4) *Er utholdende og gir ikke opp når de møter motgang*
5) *Bruker innsats som et redskap for læring*
6) *Verdsetter innsats*
7) *Viser ofte glede ved arbeid med matematikk*

(Wæge og Nosrati, 2018, s. 58)

2.6 Lærerens rolle ved matematisk problemløsning

For å legge rette for problemløsning er det ifølge Hiebert m.fl. (1997) ett av lærerens mest kritiske ansvar å finne passende problemløsningsoppgaver, som åpner for refleksjon og kommunikasjon av matematikk. Når læreren velger problemer, må han ta i betraktning hva det langsiktige målet er, for så å finne en sekvens av problemer som tilsammen, over tid, fører elevene til å nå dette målet (Hiebert, m.fl., 1997). Dette er også noe som Lester og Lambdin (2006) påpeker som viktig, da de sier at lærerens rolle ved problemløsning for det første være å sørge for at problemløsningsoppgavene som arbeides med fører elevene frem til å oppdage oppgavens matematiske formål. I tillegg sier Lester og Lambdin (2006) al læreren må sørge for at oppgavene som benyttes utfordrer elevene samtidig som den bygger på noe som er kjent for elevene fra før. For å kunne velge ut problemer sier Hiebert m.fl. (1997) at det igjen er avgjørende at læreren må god oversikt over de matematiske konseptene elevene vil møte på, samtidig som han må kjenne til hvordan elevene tenker.

Om noe er en problemløsningsoppgave eller ikke, avhenger som sagt med utgangspunkt i min defensjon av problemløsning, av problemløserens utgangspunkt for å løse oppgaven. Med dette som utgangspunkt er det som lærer avgjørende å kjenne elevenes forutsetninger og interesser godt, slik at man kan legge til rette for arbeid med matematisk problemløsning. Ved problemløsning må læreren derfor kunne ta elevenes perspektiv å kunne tolke og ta stilling til hvordan de tenker, for så å hjelpe dem i å videreformidle denne tankegangen (Grevholm, 2013). Det blir da viktig å la elevenes løsninger stå i fokus, fremfor lærerens styrende fasitsvar og allerede vel utarbeidede fremgangsmåte. Lester og Lambdin (2006) viser her til at elevene få undre seg over og den matematikken som presenteres gjennom problemløsningsarbeidet.

Pólya (2004) presenterer i sin bok *«How to solve it»* hva som er viktig under problemløsning, og hvordan læreren bør gå frem i undervisningen. Først og fremst påpeker han at det å hjelpe elevene, som er en av de viktigste arbeidsoppgavene til en lærer, også er svært utfordrende da dette krever tid, øvelse og hengivelse fra lærerens side (Pólya, 2004, s. 1). Det som er viktig når læreren skal hjelpe elevene er at han hjelper dem akkurat nok til at de kommer seg videre. Dette innebærer at læreren må kjenne elevene godt, og greie å sette seg inn i deres situasjon slik at han kan gi dem den hjelpen de trenger ved å lede dem inn på noe de selv kunne kommet på. Det vil si at læreren må kjenne elevenes forutsetninger og vite hvor det trengs litt ekstra støtte. Grunnen til at det er viktig at elevene bare får akkurat nok hjelp, er at hvis de får for mye hjelp vil de bli tatt fra følelsen av å selv mestre oppgaven, mens for lite hjelp vil virke frustrerende og nedlatende. Polya peker derfor på at man skal forslå ting eller stille ledende spørsmål som elevene selv kunne kommet på (Pólya, 2004, s. 1).

Videre bør lærerens hjelpende spørsmål være generelle, opplagte og naturlige, samtidig som de bør komme fra fornuft og allmenn kunnskap (Pólya, 2004, ss. 2-3). Slike spørsmål kan for eksempel være «*hva er det ukjente?»*, *«hva ønsker vi å finne?»* eller *«hva vet vi?»,* og forskjellige versjoner av disse. Man skal altså ikke fortelle elevene hva de skal gjøre videre, men i størst mulig grad hjelpe dem å finne en vei selv. Dette er også noe Lester (1985, s. 66) viser til, ved å si at hovedformålet med lærernes instrukser ved matematisk problemløsing, er å lære elevene å tenke selv. Hovedfokuser bør derfor være på ferdigheter som fremmer uavhengig og fleksibel tenkning. Hiebert m.fl. (1997, s. 36) viser til at læreren skal dele relevant informasjon med elevene, og at for mye informasjon, bare blir gitt elevene dersom det gir dem en fremgangsmåte for å løse problemet eller tar fra dem muligheten til å reflektere over situasjonen og gjennom dette lar dem finne løsningsmetoder til svaret. For å få til dette sier Lester og Lambdin (2006) at det er lærerens ansvar å sørge for at elevene har tilgang til verktøy som egner seg for løsning av problemet.

Polya (2004, s. 4) legger frem at problemløsning er en praktisk og imiterende ferdighet og sammenlikner det med svømming. Dersom du først har lært deg å svømme, kan du det og det vil ligge naturlig for deg. På samme måte som når man skal lære å svømme må elevene observere og imitere hva andre gjør når de løser matematiske problemer, for å så prøve selv. Det er derfor viktig at læreren skal modellere problemløsning for elevene ved å selv løse problemer. Når læreren gjør dette må han sette seg inn i situasjonen elevene er i når de løser problem og stille seg selv de samme spørsmålene han stiller elevene når de står fast. På denne måten vil elevene etterhvert selv lære å stille seg disse spørsmålene når de selv arbeider med oppgaver (Pólya, 2004, s. 5). Videre peker Polya (2004) på at elevene må lære seg å stille spørsmål og kunne revidere egen oppfatning. Dette er noe som krever ærlighet, mot og standhaftighet.

Som matematikklærer kan en god arbeidsmåte være å følge det matematikeren Henry Pollak kaller «Cross-country»-matematikk (Lampert, 1990). Med dette menes det at en selv skal gi seg ut på tilsynelatende ukjente stier, og gjennom dette vise elevene at å jobbe med matematikk handler om å være en slags stifinner som bruker de kunnskapene en besitter for å finne veien til målet. Matematikken blir på denne måten et utforskende arbeid, fremfor raske svar og pugging. Også Lester (1985, s. 66) viser til at hovedformålet med lærerens instrukser ved matematisk problemløsning, er å lære elevene å tenke selv. Hovedfokuset bør derfor være på ferdigheter som fremmer uavhengig og fleksibel tenkning. Også Ollerton (2001) påpeker viktigheten av «risk-taking». Med dette mener han at læreren må tørre å slippe kontrollen og ikke alltid vite på svaret. For å arbeide på denne måten må man som lærer igjen ha gode relasjoner til klassen. Gjennom å vise elevene at en som lærer ikke alltid har fasiten og kanskje må ty til ulike problemløsningsstrategier for å finne svar, vil en kunne gi elevene trygghet og støtte til å prøve seg frem selv. Slik modellering av hvordan man arbeider med problem og går frem når man står fast, er avgjørende for at også elevene skal kunne gjøre dette selv (Polya, 2009).

Lampert (1990) er opptatt av hvordan elevene kan få kjennskap om den virkelige matematikken. Læreren må finne problemer for diskusjon og som kan lede elevene frem til sentrale matematiske begreper og arbeidsmåter på en engasjerende måte. Læreren må videre gi elevene rom og støtte til å undersøke, reflektere, stille spørsmål og gjøre antagelser. Problemene elevene gis må kunne engasjere alle.

I sin doktorgrad peker Kilhamn (2011) på viktigheten ved å lære elevene å bruke et korrekt matematisk språk, som de forstår innholdet av ved hjelp av flere innfallsvinkler og metaforer. Hun begrunner dette ved at det matematiske språket er selve byggeklossene i det sosialt konstruerte faget, og er nødvendig for forståelsen av det abstrakte. Det blir her viktig at det bygges opp et felles språk, som alle kjenner betydningen av. Her vil det være nyttig og sammenligne ulike uttrykk og begreper for å også forstå forskjeller. Hvis man har et godt begrepsgrunnlag vil dette ifølge Grevholm (2013) også hjelpe oss til å forstå det abstrakte og til å forestille oss det som ikke konkret er fremfor oss. Når en som lærer skal finne egnede problemer til elevene er det ifølge Grevholm (2013) spesielt viktig at en kan finne flere mulige løsninger, samt at disse løsningene kan forklares med ulike representasjoner som bilde, figurer, symboler og ord.

Ifølge Breiteig (2008, s. 36) kan det å la elevene delta aktivt i matematiske diskusjoner ved å dele sine svar og hypoteser med resten av klassen, få frem et vekslingsmønster mellom induktiv observasjon og deduktiv generalisering. Videre peker Breiteig (2008, s. 40) på at problemløsning både krever tid og at læreren greier å finne oppgaver som er gode og egnede, men også at dette er noe som må inn i skolen og i læreres tenkning om matematikk og god undervisning. Ved problemløsning blir lærerens rolle å underveis lede elevene videre ved å stille spørsmål og følge opp svarene som gis (Breiteig, 2008, s. 40). På denne måten vil fokuset ligge på den matematiske prosessen fremfor rett eller galt svar. Ifølget Hiebert m.fl (1997) er det vanligvis ikke lurt å foreslå for elevene å endre sine egne metoder for å komme nærmere standard algoritmer, da dette fort kan oppfattes som kritikk. Elevene bør ikke bruke metoder på grunnlag av at de føler seg pålagt dem av læreren, men ut ifra egent tenking og det de selv forstår.

Hiebert m.fl. (1997, s.38) påpeker også at de forskjellige løsningsmetodene som elevene finner bør undersøkes og diskuteres, med mål om at alle deltakerne leter etter bedre metoder. Lester og Lambdin (2006) støtter også opp om dette da de seer at elevene må få presentere sine løsningsstrategier og at medelever tenker nøye over disse løsningsstrategiene. Uavhengig om en elev gir et rett eller galt svar, bør man ifølge Grevholm (2013, s. 67) spørre hvordan eleven kom frem til svaret eller tenkte. På denne måten vil barnet få muligheten og ikke minst øvelse, på å strukturere og formulere tankene sine, noe som blant annet vil gjøre dem bedre problemløsere (Grevholm, 2013, s. 67). I tillegg vil du som lærer få høre hvordan eleven tenkte og forsto oppgaven, og hvor den eventuelle feilen eller misforståelsen ligger.

Som en sjekkliste for læreren, presenterer Breiteig (2008, s. 39) elleve punkter med trekk som kan indikere utforsking og problemløsning. Denne listen kan være en grei støtte for lærere som ønsker å bruke en slik arbeidsform.

- *Finn rike oppgaver.*
- *Motiver elevene.*
- *Gi dem tid.*
- *La elevene selv få en vesentlig del av oppdagelsen, la dem gå veien fram.*

- *Lytt til deres språk og deres formuleringer.*
- *Still oppfølgende spørsmål, be dem gjerne om å forklare hvordan de har gjort og tenkt og hvorfor de har gjort det slik.*
- *Stimuler deres tenking om eget arbeid og egne løsninger.*
- *Motstå fristelsen til å gi dem en rask løsning.*
- *Verdsett deres oppdagelse og deres forståelse.*
- *Hold målet med oppgaven og aktiviteten klart.*
- *Verdsett oppsummering og refleksjon ved slutten av en arbeidsøkt.*

2.7 Sosiomatematiske normer

Siden matematisk problemløsning er en egen måte å arbeide med matematikk på, som krever at elevene greier å reflektere, tenke logisk og kanskje til og med sette ord på tankene sine, krever dette at klassemiljøet åpner mulighetene for dette. Innenfor et hvert klasserom finnes det ulike normer som dannes fra rammene og forventningene som gis og settes for elevene og fellesskapet. Disse normene, som handler om hvordan man skal opptre i klasserommet kalles sosiale normer, men vi kan også finne normer som er rettet spesifikt mot det matematiske aspektet, normer Yackel og Cobb (1996, s. 458) kaller sosiomatematiske normer. En sosial norm kan for eksempel være at elevene er innforstått med at det forventes at de grunngir svarene sine, mens hva som er gyldig som en matematisk forklaring er en sosiomatematisk norm (Yackel & Cobb, 1996, s. 461). Er elevene vant til å måtte forklare sin tankeprosess og løsningsstrategi, blir det på denne måten en sosiomatematisk norm og forventning, både blant elevene og læreren, om at det er dette som er viktig og at det er slik det skal være. Lester og Lambdin (2006) sier læreren må sørge for å skape et klassemiljø med normer som oppmuntrer til en slik kultur.

Yackel og Cobb (1996, s. 458) gjennomførte et utviklingsprosjekt på barneskolen hvor de forsket på hvordan elever utvikler matematisk forståelse og verdier, samt hvordan de blir intellektuelt autonome innenfor matematikk. I dette arbeidet klargjør de også hvordan lærerne kan virke representative for det matematiske klassesamfunnet hvor elevene utvikler sine egne personlige og meningsfulle arbeidsstrategier og tanker. For eksempel vil læreren kunne legge til rette for et miljø hvor elevene deler sine tanker og fremgangsmåter, ved å vise engasjement og interesse for løsningsforslagene de gir på en spesiell måte. Ved at nye forslag til tankemåter og løsningsforslag får positive tilbakemeldinger fra læreren, vil flere kunne prøve å komme med nye løsningsforslag (Yackel & Cobb, 1996, ss. 462-466). Det vil da være viktig at læreren påpeker hvis elevene kommer med løsningsforslag som i prinsippet er likt et som tidligere er nevnt slik at det i større grad verdsettes, og på denne måten indirekte oppfordres, til å tenke nytt. Ved å jobbe på denne måten kan det å dele sine matematiske løsningsforslag til slutt utvikles til en sosiomatematisk norm i klassen, og elevene vil på denne måten få trening i å sette ord på tankene sine samt å dele dem med andre. I tillegg vil dette kunne føre til at elevene åpner øynene for at det finnes flere fremgangsmåter og samtidig kanskje hente opp noen strategier som de selv ikke har tenkt på.

Ifølge Ånestad (2011) er det viktig at læreren styrer kommunikasjonen på en pedagogisk måte og sørger for at matematikken og læringen kommer frem i samtalene. Ved å la elevene i plenum diskutere løsningsstrategier og vurdere løsninger på oppgaver de jobber med opp mot hverandre, kan man skape effektive og læringsrike samtaler (Ånestad, 2011, ss. 15-16). Dette kan også føre til større åpenhet blant elevene for å ta andres forslag i betraktning og vurdere dem opp mot sitt eget. Dersom man greier å utvikle sosiomatematiske normer som åpner for slik åpenhet og vurderingsevne som Yackel og Cobb (1996) beskriver, vil elevene som en konsekvens av dette lettere kunne knytte matematikken de gjennomfører til hverdagslivet og verden utenom skolen, fordi de «blir tvunget» til å reflektere og vurdere sine og andres løsningsforslag og dermed i større grad også måtte sette det inn i en konkret kontekst. Ved å sette ord på tanker vil elevene kunne få en bedre forståelse av matematikken fordi de abstrakte tankene forklares og konkretiseres med ord. Ifølge Ånestad (2011, s. 19) vil også behovet for nivådifferensiering minke dersom undervisningen er kommunikativ fremfor oppgavestyrt.

Boaler (2003) fant i sin forskning at man ved å gi autoriteten til matematikken, utvikler et samspill mellom eleven og matematikken som minner om en dans. For å gi autoriteten til matematikken på denne måten må man som lærer la matematikken avgjøre om et svar er riktig eller ikke, fremfor en selv. Dersom elevene skjønner at man kan bruke matematikken til å sjekke svaret sitt, vil det på denne måten vil det på denne måten skapes en matematisk relasjon mellom dem, hvor eleven ikke trenger å lene seg til andre enn seg selv og matematikken. Dette kan utføres ved å ikke være den som sitter med svarene, men å be elevene prøve med andre tall eller lage diagrammer for å sjekke svaret sitt (Boaler, 2003).

Ånestad (2011, s. 18) viser til Boaler og Greenos forskning fra 2000, som fant at dersom elevene var vant med å arbeide prosessorientert i matematikk, hadde de lettere for å overføre matematikkunnskapene sine til nye sammenhenger enn de elevene som var mest vant til å arbeide i lærebøker. Ifølge Ånestad (2011, s. 18) vil det store fokuset på prøver og resultater kunne ødelegge for nytteverdien i det elevene får lære, fordi det som gir utslag på prøvene, og dermed skolens bilde utad, vektlegges tyngre enn fornuften i det elevene lærer.

De Corte m.fl. (2000) peker i sin artikkel om selvregulering på viktigheten og nødvendigheten av at elever blir selvregulerte og involverte i egen læring for å tilegne seg kunnskap og utvikle ferdigheter. Wæge og Nosrati (2018, s. 67) definerer selvregulering som styring av egne læringsprosesser, som problemløsningsprosessens del gjør selvregulering elevene kapable til å endre problemløsningsstrategi om nødvendig. Fordi det å bli selvregulerte problemløsere ikke er noe som skjer automatisk og spontant, men krever tilegnelse av ferdigheter over en langsiktig læringsprosess, uttrykker De Corte m.fl. (2000, s. 688) videre at dette er noe som bør jobbes med og inkluderes i undervisningen allerede fra ung alder. Ifølge De Corte m.fl. (2000) vil man med gode selvregulerings- og problemløsningsferdigheter bli produktiv og greier å se på egen læring fra et metaperspektiv og på denne måten ha kontroll over sine læringsprosesser. For læreren blir det derfor viktig å legge til rette for at elevene får utvikle disse ferdighetene og å arbeide mot ødeleggende og forstyrrende oppfattelser av matematikk (Schoenfeld, 1992).

Ifølge De Corte m.fl. (2000, s. 687) har synet på matematikk på denne måten endret seg til å sees på som en aktiv og konstruktiv prosess som eleven selv må ta del gjennom selvregulering. At elevene blir selvregulerte er igjen både et resultat av, og avgjørende for, selvstendig reflektering, tenkning og arbeid med problemløsning (De Corte m.fl., 2000). At elevene skal utforske og være aktive ved å arbeide på varierte måter og ved å benytte varierte strategier, viser at matematisk problemløsning fortsatt er viktig og gjeldende i dagens læreplan (LK06).

Å bygge gode relasjoner til elevene er derfor en sentral del av dette arbeidet. Relasjonsbygging er en svært viktig del av det å være lærer, og uansett hva man gjør vil man få en relasjon til elevene, god eller dårlig, som igjen vil påvirke alt fra elevens trivsel og motivasjon til elevens innsats og læring (Drugli, 2015). Å bygge gode relasjoner til elevene er en kompleks og sammensatt oppgave. Dette arbeidet handler ifølge Drugli (2015) om både struktur og god klasseledelse, samt at man respekterer elevene, støtter dem når det trengs, viser interesse og anerkjennelse for deres liv og arbeid og har det morsomt i lag med dem. Det handler om at elevene skal trives på skolen gjennom trygge rammer, klare forventninger.

KAPITTEL 3: Metode

Metode kommer av det greske ordet *methodos* som betyr «veien til målet» (Befring, 2015, s. 36). I mitt tilfelle har *målet* vært problemstillingen min;

> *«Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av matematisk problemløsning på småskolen?»*

og *veien* vært alt jeg har gjort for å svare på denne. I dette kapittelet vil jeg derfor belyse veien jeg har tatt i dette forskningsstudie. For å gjøre dette vil jeg presentere og grunngi valgene jeg har tatt underveis i studien for å komme frem til resultatene mine. Først vil jeg i grove trekk presenterer kvantitativ og kvalitativ metode, før jeg kommer inn på hvilken av de to retningene jeg har valgt. Etter dette legges valg av forskningsdesign frem, før jeg presenterer utvalget av informanter og kort om de informantene jeg endte med. Videre vil jeg legge frem om hvordan datainnsamlingen min foregikk ved å ta for meg de ulike metodene jeg brukte til dette og kort om hvordan dette foregikk i min studie. Jeg vil så ta for meg hvordan mine innsamlede data har blitt behandlet før jeg til slutt i kapitelet skriver om hvordan jeg har sikret reliabiliteten, validiteten i dette forskningsarbeidet og de etiske retningslinjene jeg har fulgt.

3.1 Valg av metode

Kvalitative og kvantitative forskningsmetoder blir ofte satt opp mot hverandre som konkurrerende, atskilte metoderetninger. De kvalitative metodene forklares da ofte med at de går i dybden og gir oss en bedre innsikt i det eller de som studeres, mens de kvantitative metodene går bredt ut og gir oss oversikt (Thornquist, 2003, s. 71). Dette er imidlertid ikke noe som alltid vil stemme, og ifølge Hjardemaal og Tveit (2011, s. 20) bør man derfor heller fokusere på metodenes sterke og svake sider som igjen må vektlegges ut ifra hva man er ute etter å finne. I mitt valg av metode har jeg derfor først og fremst fokusert på hva jeg ønsker å forske på og fordype meg i, for så å la dette legge rammene for hvordan empirien best burde samles inn. Hvilken av metodetradisjonene jeg endte med å følge var slik sett ikke viktig for meg før jeg hadde bestemt hva jeg ønsket og finne og hvordan jeg best ville få svar på dette. Da jeg hadde fastslått problemstillingen og målene for studiet, startet jeg å fordype meg i kvalitative og kvantitative tradisjoner og deres styrker og svakheter, før jeg fastslo at dette ville bli en kvalitativ forskningsstudie.

I kvalitative forskningsstrategier arbeider man som regel induktivt og «oppdagende» (Ringdal, 2013, s. 104). Dette vil si at forskeren starter med å sette seg inn i informantens situasjon for så å forsøke å forstå informanten gjennom noen nøkkelbegreper. Til slutt vil man kunne lage seg en teori eller hypotese ut ifra det man fant ut om forskningstemaet i dette spesielle tilfellet. Når det kommer til kvalitativ forskning vil det i motsetning til kvantitativ forskning ikke være egnet å trekke slutninger på tvers av fenomen ved å sammenligne dem (Hjardemaal & Tveit, 2011, s. 19). Ved kvalitativ forskning er det ikke meningen at kunnskapen skal kunne generaliseres, men den skal kunne ha visse overføringsverdier ved at en kan hente ut bruddstykker som kommer til nytte i andre eller liknende situasjoner. Ifølge Aase og Fossåskaret (2014, s. 139) handler kvalitativ forskning om å ta for seg et fenomen som man så studerer fra forskjellige posisjoner eller ut ifra ulike forståelse av virkeligheten. Hjardemaal og Tveit (2011, s. 19) peker i samsvar med dette på at den kvalitative analysens styrke ligger ved det å kunne vurdere enkeltkasus helhetlig.

Generelt sett kan man ikke si at den ene tradisjonen er bedre enn den andre da de utfyller hverandre, men ut i fra mine mål med studien var det den kvalitative retningen som egnet seg best. Hovedgrunnen til dette var at jeg ønsket å finne noen få enkeltkasus og gå i dybden på hvordan man *kan* arbeide med matematisk problemstilling, og helhetlig vurdering av enkeltkasus er som nevnt ifølge Hjardemaal og Tveit (2011, s. 19) den kvalitative retningens styrke.

Ifølge Ringdal (2013, s. 105) baserer kvalitativ forskning seg på få analyseenheter hvor man finner informasjon som er rik og dyp, mens man i kvantitativ forskning får en bred forståelse ved å ha et stort utvalg hvor man registrerer informasjon som er strukturert og sammenliknbar (Ringdal, 2013, s. 105). Med utgangspunkt i min problemstilling og de svarene jeg ønsket å finne ble det naturlig for meg å velge en kvalitativ tilnærming til forskningsarbeidet. Grunnen til at dette var naturlig for meg var at jeg var ute etter å finne ut ulike måter man på en hensiktsmessig måte kan arbeide med matematisk problemløsning på i småskolen. Det var ikke et mål å verken sammenlikne eller generalisere, men å få en bedre forståelse for hvordan lærere kan arbeide med problemløsning i matematikken og hva dette krever av læreren. Det ble derfor viktig for meg å komme litt tett inn på informantene mine, for å prøve å gripe deres ståsted og forstå deres handlinger og arbeid med problemløsning. På denne måten håpet jeg også på å få en bedre forståelse for arbeid med matematisk problemløsning, og videre bidra til økt fokus på problemløsning og inspirere flere lærere til å bruke denne arbeidsformen allerede fra skolestart.

I mitt tilfelle kunne det selvsagt også vært interessant og gjort en kvantitativ studie og forsket på hvor mange som faktisk mener de arbeider med matematisk problemløsning på småskolen og hva lærere mener om dette, men jeg fant at det var mer interessant for meg å se på hvordan de som jobber på denne måten faktisk får det til, og hva dette krever av dem. På denne måten ønsket jeg å bygge min forskning på empirien jeg samlet inn ved å observere og intervjue lærere, for så å senere koble dette opp mot aktuell teori som allerede finnes på området. Som sagt tidligere er det å la empirien styre oppgaven, fremfor teorien som allerede finnes på område, noe som ifølge Ringdal (2013, s. 104) er typisk for kvalitativ forskning. Ved å velge en slik oppdagende og induktiv strategi ønsket jeg å vektlegge mine informanters tanker og erfaringer, og høre hvordan de mener at det faktisk er å jobbe med matematisk problemstilling på småskolen, hva som er utfordrende og hva som har vært viktig for lærerne selv for å få dette til.

3.2 Forskningsdesign

Et forskningsdesign er ifølge Befring (2015, ss. 36, 84) når forskjellige metoder kombineres for å nå prosjektets mål, og gjenspeiles i hovedmønsterene denne kombinasjonen gir. Et forskningsdesign kan for eksempel være et eksperimentelt design, et tverrsnittdesign, et langsgående design, en casestudie eller en komparativ studie. Fordi jeg ønsket å studere forskjellige måter matematisk problemløsning kan arbeides med og lærerens rolle i dette arbeidet, falt det naturlig for meg å velge et tverrsnittdesign. Datainnsamlingen skulle altså ikke foregå over lengre tid, men være et innblikk i hvordan det ble arbeidet med matematisk problemløsning, der og da. Ifølge Ringdal (2013, s. 107) er målet med et tverrsnittdesign i første omgang å kunne beskrive forhold i nåtid, og alle målinger skjer derfor innenfor et avgrenset tidsrom. Dette avgrensede tidsrommet ble for meg en dobbelttime med matematikkundervisning, og et etterfølgende intervju av læreren.

For å kunne svare på problemstillingen min på en best mulig måte, bestemte jeg meg for å samle inn datamateriale gjennom både observasjon og intervju. Ved å kombinere disse to metodene ønsket jeg å kunne beskrive tiltak lærerne jeg observerte tok, og hvordan de arbeidet med matematisk problemløsning. Med dette mener jeg hvordan lærerne arbeidet med matematisk problemløsning og det de gjorde i den korte tiden jeg observerte dem, ikke hva de generelt gjør. I tillegg intervjuet jeg hver lærer like etter undervisningen, og det er disse intervjuene som utgjør hovedvekten i forskningen min, og i analysen er også hovedsakelig referanser fra intervjuene jeg vil bruke for å presentere lærernes egne meninger, tanker og erfaringer. Likevel ble observasjonene for min del en svært viktig del, fordi jeg tidligere allerede har lest og lært mye om matematisk problemløsning og hva teorien sier om hvordan det bør utføres og hvorfor. Det jeg nå ville vite var hvordan dette faktisk kunne foregå ute i det virkelige livet og hvordan det fikk innpass i en travel skolehverdag. Gjennom observasjonene ønsket jeg derfor å både få en bedre forståelse av hva lærerne snakket om under intervjuene, samt å se og føle på kroppen hvordan slik undervisning *kan* foregå, og erfare hva som faktisk *kan* bli gjort.

Gjennom et intervju vil man få kunnskap basert på informantens ståsted, oppfatning og mening. Ved å observere vil man derimot få førstehåndserfaring av det som skjer ved at man selv er tilstede, og man må selv vurdere og ta stilling til det man observerer. Disse to innsamlingsmetodene gir oss på denne måten forskjellig data, og for meg ble det naturlig å kombinere dem siden jeg først og fremst ønsket å se undervisning i matematisk problemløsning fra lærernes ståsted[9], men også ønsket å selv få best mulig innsikt i hvordan lærerne underviste[10].

Primærdata er det man får når empirisk data samles inn med formål å besvare en spesiell problemstilling (Befring, 2015, ss. 44, 46). På denne måten er dette unike data for det man forsker på, ved at man som forsker selv har samlet det inn med et bestemt formål. Til dette forskningsarbeidet har jeg samlet inn primærdata i på tre måter: feltsamtale med informant, observasjon og intervju. Feltsamtalen fungerte som et forstudium som skulle forberede meg til observasjonen, men også til intervjuet. Under feltsamtalene snakket jeg med hver av informantene for å forberede både meg og dem på det som skulle skje. I tillegg var dette ustrukturerte samtaler underveis og etter observasjon. Jeg fikk samtykke fra alle informantene om å kunne referere til disse feltsamtalene dersom det skulle bli nødvendig, men i utgangspunktet var disse ment for forberedelse. Observasjonen var også et slags forstudium for å gjøre meg forberedt til intervjuet samtidig som dette var avgjørende for å øke min forståelse og gi meg et innblikk i hvordan lærerne jobbet.

3.3 Utvalg

Til min forskning var jeg avhengig av å få tak i matematikklærere på småskolen som faktisk arbeidet med matematisk problemløsning i sin undervisning. For å komme i kontakt med informanter lette jeg derfor konsekvent etter lærere som jobbet på småskolen og sa at de arbeidet med matematisk problemløsning. På denne måten fikk jeg et strategisk utvalg av informanter. Ifølge Thagaard (2013, s. 60) baserer *strategiske utvalg* seg på at man søker informanter ut ifra visse kriterier, slik at man forsøker å sikre at deltagerne er strategisk egnet til å delta ut ifra forskningens hensikt og problemstilling. Ut ifra min problemstilling ble disse kriteriene nettopp at læreren måtte undervise i småskolen og at han eller hun brukte problemløsning i matematikkundervisningen.

---

[9] Gjennom intervju
[10] Gjennom observasjon

Det å få tak i informanter ut ifra et strategisk utvalg basert på mine kriterier, viste seg å være vanskeligere enn jeg i utgangspunktet trodde. Grunnen til dette var at jeg ikke visste hvem som fylte kriteriene mine og dermed ikke hvem jeg kunne spørre. For å få tak i informanter bestemte jeg med derfor for å ty til det Thagaard (2013, ss. 61-62) omtaler som *snøballmetoden*. Snøballmetoden er en form for tilgjengelighetsutvalg, og baserer seg på å be folk du kjenner eller er i kontakt med, om å spørre folk de kjenner som innfrir kvalifikasjonene du er ute etter, til å stille som informanter. For å få informanter spurte jeg altså folk jeg kjenner om de visste om folk som arbeidet med problemløsning i matematikk på småskolen, men også om de visste om folk som kanskje hadde god oversikt og viste om andre som jobbet på denne måten. I tillegg til å spørre andre lærere som jeg kjenner, spurte jeg også om tips fra lærere ved Høgskulen i Volda, jeg kontaktet Landslaget for matematikk i skolen (LAMIS), Matematikksenteret og etterhvert la jeg også ut en annonse på facebooksidene «Matematikkdidaktikk i barneskolen» og «Matematikkdidaktikk». I tillegg bidro veilederene mine ved å sende ut e-post til bekjente som igjen ville spørre sine bekjente. På denne måten fikk jeg stadig flere å spørre, men likevel var det ikke lett å få tak i lærere som jobbet med problemløsning på 1.-4. trinn og som samtidig hadde tid til å stille som informanter.

Før jeg kunne spørre lærerne om å være informanter gikk jeg veien om skolens rektor for å spørre om det var greit at jeg kontaktet dem og eventuelt kom til skolen og utførte mitt forskningsarbeid der. De fleste rektorene forsøkte jeg å kontakte via telefon, men sendte også en kort mail til mange av dem. Dette gjorde jeg for å i korte trekk informere om mitt forskningsarbeid og litt om hva det ville innebære for eventuelle informanter å delta i studien. En slik informering av, og tillatelse fra rektor er viktig for å unngå konflikter og negative konsekvenser for skolen eller lærerne. En grunn til dette er at det å delta i forskning blant annet kan ha påvirkning på praksisen til de som deltar og dermed også på skolen. I noen av tilfellene kom jeg i kontakt med informanten direkte, fordi at noen for eksempel tok direkte kontakt med meg via facebook. I disse tilfellene takket jeg for interessen, før det ble viktig for meg å avklare med rektor om denne læreren kunne stille som informant.

I første omgang fikk jeg tak i tre lærere fra samme skole som underviste på 1., 2. og 3. trinn. At lærerne underviste på samme skole var i utgangspunktet ikke et kriterium jeg hadde satt meg, og når jeg kom i kontakt med disse tre måtte jeg derfor veie fordeler og ulemper ved dette opp mot hverandre. På den ene siden så jeg på det som en ulempe at jeg ikke ville ha kontroll over hvor mye disse lærerne ville påvirke hverandre gjennom tilfeldige eller bevisste samtaler og aktivitet, og eventuelt om de ville forberede seg i lag eller ikke. Hvis de lot seg påvirke av hverandre ville kanskje en eller to av informantenes stemme, oppfatninger og meninger påvirke situasjonen og gi utslag på undervisningsoppleggene og/eller intervjuene. På denne måten ville jeg kanskje ikke få alle de tre lærernes stemmer frem like sterkt. På den andre siden så jeg på det som interessant å få studere hvordan lærere på samme skole og med kanskje nokså like referansekilder, i tilfelle ville knytte dette til de ulike klassetrinnene og tilpasse den kunnskapen og forståelsen de kanskje delte mye av, til elevenes ulike alder. I tillegg til dette så jeg også flere praktiske fordeler ved å få være på en og samme skole, som praktisk gjennomførelse, kjennskap til skolen og tidsbesparelse. Jeg konkluderte tilslutt med at det ville være berikende for oppgaven min å ha disse tre lærerne som informanter, siden jeg tok bevisst stilling til hva dette kunne gjøre med resultatet og derfor kunne vurdere mine innsamlede data deretter.

Senere fikk jeg to informanter til. Den ene var lærer i 1. klasse, og den andre lærer iblant annet 2. og 3. klasse, som jeg fikk observere. Alt i alt endte jeg opp med å observere seks dobbelttimer med problemløsning, fordelt på seks ulike klasser fra 1.-3. trinn, på tre forskjellige skoler fra tre forskjellige fylker. I tillegg intervjuet jeg alle fem lærerne i omlag 45 minutter, like etter observasjonene var ferdig. Dette utgjorde altså størrelsen til utvalget mitt. Ifølge Thagaard (2013, s. 65) vil omfanget av informanter i et kvalitativt utvalg bestemmes ut ifra tid, ressurser og prosjektets problemstilling. Dette vil si at utvalgets størrelse må være vidt nok til å forske på det problemstillingen krever, samtidig som en må ha tid og ressurser til å analysere og komme i dybden på det innsamlede datamateriale. I utgangspunktet ville jeg gjerne hatt enda flere informanter, men fordi det viste seg å være såpass vanskelig å få tak i lærere som innfridde kriteriene mine, ble dette for tid- og ressurskrevende. I tillegg fikk jeg observert undervisning fra hvert av trinnene fra 1.-3. trinn to ganger, noe som gjorde at jeg fikk observere to forskjellige måter eller innfallsvinkler til problemløsning på hvert av trinnene.

For mitt forskningsarbeid ble derfor fem informanter og seks ulike undervisningsøkter med problemløsning et passe stort omfang, og det viste seg at dette gav meg et stort nok innblikk i hvordan man kan arbeide med matematisk problemløsning på småskolen, og i informantenes erfaringer og tanker på området. Etter å ha analysert datamaterialet fant jeg ut at spesielt to av informantene skilte seg ut som helt, og nesten helt nye, når det kom til undervisning gjennom matematisk problemløsning. Jeg vurderte sterkt om jeg skulle ta disse med i det videre analyse og drøftingsarbeidet, eller la det være, men etter mye frem og tilbake, fant jeg at dette bare ville berike oppgaven min, fordi jeg slik også fikk innblikk i hvordan man kan arbeide med matematisk problemløsning før man får mye og nødvendig erfaring.

3.3.1 Kort om informantene

For å beskytte informantenes identitet er kjønnet og alle navnene deres fiktive. Jeg har ikke tatt lærerens kjønn i betraktning i dette arbeidet, da jeg verken ønsker eller kan vurdere om dette har noen innvirkning på lærerens undervisning i matematisk problemløsning ut ifra mitt lille utvalg av informanter, og fokus. Av de følgende informantene, er det Anne, Cecilie og Daniel som jobber på samme skole, mens Benjamin og Emilie jobber i hvert

ANNE er kontaktlærer i 1. klasse. Hun begynte å jobbe som nyutdannet lærer i august 2015, og selv om hun har 60 studiepoeng i matematikk er det er første gang hun underviser i faget i år[11]. Hun er selv ny som matematikklærer og har derfor ikke noe særlig erfaring med problemløsning, men likevel veldig villig til å prøve og synes det er fint å kunne benytte problemløsning og få spekulere i fellesskap med elevene:

> *«[...] at du kan være med å undre deg sammen med elevene da, om hva det er som kan være svaret og legge litt fra seg dette her med å skulle vite».*

Dette mener Anne er viktig å arbeide med for å variere undervisningen og unngå at det bare blir læreren som sitter med svarene, slik hun også ofte må gjøre når de øver på å regne vanlige regnestykker og elevene vil vite svaret.

BENJAMIN er også kontaktlærer i 1. klasse. Han har 20 års erfaring som lærer, men driver nå og etterutdanner seg og studerer matematikk. Etter å ha vært i læreryrket i 10 år begynte Benjamin å arbeide litt med problemløsning, og siden har det sakte men sikkert blitt mer og mer. Nå som han har begynt å studere matematikk har han også blitt mere oppmerksom på at slikt arbeid er viktig. Han sier at slikt arbeid krever erfaring og at man er trygg som lærer:

> *«[...] når man er trygg på å være i klassen så kommer det liksom litt mer av seg selv».*

[11] Skoleåret 2017-2018

Jeg forstår det Benjamin sier som at å bruke matematisk problemløsning i undervisningen krever erfaring og at man er trygg nok til å stole på seg selv nok til å slippe kontroll og rutiner for å være utforskende og oppdagende. Benjamin er svært opptatt av den matematiske samtalen, og sier at du prøver å samtale mye med elevene og vil høre hva de tenker. Dette er blant annet et av tiltakene Benjamin tar for å sørge for å få alle elevene med, noe han mener er det viktigste å fokusere på som lærer når elevene skal arbeide med matematisk problemløsning:

> *«Det [viktigste] er å prøve å få alle med, og det at ting nødvendigvis ikke er riktig og feil. Og prosessen; hvordan tenkte du det om det».*

På denne måten får elevene sette ord på tankene sine og samtidig dele strategier og fremgangsmåter med sine medelever. I tillegg kan Benjamin gripe inn og veilede elevene og i større grad sørge for at det ikke oppstår vranglæring. Benjamin mener det er viktig at elevene lærer seg tankegangen ved problemløsning allerede fra 1. klasse slik at de blir vant til denne måten å tenke og jobbe på. Det er ikke alltid bare ett riktig svar, og heller ikke bare en måte å finne svaret på.

CECILIE er kontaktlærer i 2. klasse, og har begynt på sitt femte år som lærer. Hun har ikke så mye erfaring med problemløsning enda, men har begynt å jobbe litt med det, og mener det er viktig for å variere undervisningen og nå ut til flest mulig elever:

> *«[problemløsning er viktig] for å nå frem til alle tenker jeg. Også gi dem ulike måter å tenke på. Gjøre undervisningen spennende».*

Cecilie er opptatt av at elevene synes undervisningen er spennende og at de må få introdusert ulike innfallsvinkler til oppgaver siden alle er forskjellige og tenker på forskjellige måter. Hun fremhever derfor at det er viktig å reflektere sammen med elevene over smarte strategier og fremgangsmåter slik at alle forstår:

> *«Legge til rette for at alle skal forstå da. Vise dem ulike framgangsmåter, særlig sånn i regnestykke da, så har vi, nå har vi veldig fokus på at man tenker forskjellig. Hva er lure regnestrategier».*

Ved å presentere flere innfallsvinkler for elevene håper Cecilie på å få med flest mulig elever. Siden elevene ennå er så unge, sier Cecilie at det å styre elevene og gi dem rammer er viktig for at de ikke skal dette av.

DANIEL har 4 års lærerutdanning med mellomfag i matematikk. I tillegg har han vært på mange kurs og også holdt kurs selv, noe han har lært mye av. Daniel har jobbet som lærer i hele 38 års og har derfor mye erfaring i yrket. I år er han ny kontaktlærer for 3. klasse. Denne klassen har tidligere vært svært urolig og utfordrende, noe Daniel ble satt inn for å få en endring på.

EMILIE har jobbet som lærer i 7 år, og etter at hun videreutdannet seg innenfor matematikk har hun, de siste 3 årene har hun brukt problemløsning mye i undervisningen og takker de to årene med matematikkutdanning for dette. I dag er Emilie en såkalt «merlærer» i matematikk på småskolen, og ho henne fikk jeg observere to dobbelttimer med matematikk; én i en 2. klasse og én i en 3. klasse.

3.4 Feltsamtale

I tillegg til observasjon og intervju hadde jeg et ustrukturert intervju som en samtale med informantene før datainnsamlingen startet. For Anne, Cecilie og Daniel, ble dette et felles møte på skolen, da dette var mest praktisk for alle parter. I tillegg tenkte jeg at informantene allerede visste om hverandre ved at jeg fikk to av dem ved at den tredje spurte dem om å bli med. I tillegg tenke jeg at informantene trolig kom til å snakke i lag uansett, og at de like gjerne kunne få den nøyaktig samme informasjonen for å gi et likere utgangspunkt. Under denne samtalen var jeg som forsker likevel opptatt av at vi skulle snakke minst mulig om matematisk problemløsning og i størst mulig grad forholde oss til det praktiske rundt at jeg skulle komme for å observere. En av hovedgrunnene til at jeg fant det nødvendig å møte lærerne på skolen for å snakke med dem, var for å nettopp for å forberede meg selv på hvordan de jobbet med matematisk problemløsning, hvor lenge de synes det var hensiktsmessig og passende at jeg observerte og for å avklare eventuelle spørsmål informantene måtte ha. Samtidig ønsket jeg å få et inntrykk av skolen og starte en mental forberedelse av hvordan intervjuene, og spesielt observasjonene kunne gjennomføres. Til tross for at jeg gjennom feltsamtalen på denne skolen var ekstra opptatt av hva jeg sa og hvordan jeg styrte samtalen slik at den ikke skulle komme inn på diskusjoner rundt matematisk problemløsning. I etterkant tenker jeg nok likevel at lærerne har hatt en viss innvirkning på hverandre, men dette er nok heller fordi de er kolleger som naturligvis snakker med hverandre, og ikke på grunn av det møtet vi hadde felles. Jeg vil komme videre inn på dette i analysekapittelet.

Når det kommer til feltsamtalene med Benjamin og Emilie, ble de holdt individuelt med meg, på de ulike skolene disse arbeidet på.

3.5 Observasjon

Siden jeg spurte om å få observere problemløsning la jeg en viss føring på undervisningen, men jeg fant at dette var det beste for min oppgave siden jeg var ute etter hvordan man *kan* arbeide med problemløsning og ikke hvordan en tilfeldig undervisningstime generelt er, eller hvor mye problemløsning en generelt har. Siden jeg bare observerte en dobbelttime i hver klasse, er dette selvfølgelig alt for lite til å si noe generelt om undervisningen, og observasjonene var først og fremst for at jeg skulle få oppleve hvordan en slik time kan foregå og på denne måten få en bedre forståelse for dette selv.

Observasjonene jeg utførte var åpne. Dette vil si at både elever, lærere og eventuelle assistenter visste at jeg var der for å observere. Nøyaktig hva lærerne sa til elevene varierte litt, men i all hovedsak ble de fortalt kort hvem jeg er og at jeg var der for å se hvilke oppgaver de jobbet med i matematikken og på læreren. Det kan selvsagt ha en viss påvirkning at elevene og lærer vet at de blir observert og forskerens tilstedeværelse i det hele tatt, men det ville ikke vært etisk riktig med en lukket observasjon. I tillegg var det ikke elevene jeg ønsket å observere, og hvis læreren ikke skulle visst at han ble observert ville dette ført med seg en hel rekke problemer og utfordringer både med tanke på det etiske og rent praktisk. For meg var det dessuten ikke noe problem om lærere og elever ble litt påvirket av at jeg var der, siden jeg var ute etter å se eksempler på hvordan man kan undervise i matematikk ved hjelp av matematisk problemløsning på småskolen, og ikke hvordan dette generelt eller faktisk må bli gjort.

I tillegg til at observasjonene var åpne, valgte jeg å være en ikke-deltakende observatør. Ifølge Fangen (2010, s. 77) vil det å være en ikke-deltakende observatør si at du som forsker ikke involverer deg i det som skjer, men fokuserer på å bare observere- som en flue på veggen. Jeg gjorde altså i minst mulig grad noe for å påvirke situasjonen. Ved å være en ikke-deltakende observatør skal man opptre som om man er fraværende og sitte helt stille uten å gripe inn eller delta på noen videre måte enn sin faktiske tilstedeværelse i rommet. Hovedgrunnen til at jeg ønsket å ikke ta en deltakende rolle i observasjonen, var at jeg da var redd for å få med meg mindre av det læreren gjorde og sa. I tillegg kunne dette, hvis jeg for eksempel selv skulle gått rundt og hjulpet elever selv, skapt problemer, samt bidratt til å påvirke problemløsningen, da jeg ikke hadde visst hvordan jeg skulle hjelpe dem, da dette nettopp var noe av det jeg var ute etter å finne i dette forskningsarbeidet. Jeg ønsket altså å få med meg mest mulig av det læreren gjorde og sa. Jeg fant likevel ut at jeg til en viss grad måtte delta og samhandle med elever og lærere for at situasjonen ikke skulle bli for unaturlig. På denne måten varierte jeg min ikke-deltakende observatørrolle med uformell småprat med både elever og lærere. Hvor mye småprat det ble varierte ut ifra hva jeg fant naturlig og nødvendig for hver enkelt observasjon og i samhandling med hver enkelt lærer. Småpraten fant sted både før, etter men også litt underveis i observasjonene, alt etter hva som var naturlig og når det passet seg uten å påvirke mine muligheter til å observere. Dette var altså et forsøk på å gli litt mer naturlig inn i klasserommet, noe som ifølge Fangen (2010, s. 78) vil føre til å minske forskereffekten og dermed også i mindre grad påvirker oppførselen til de som er tilstede under observasjonen.

3.5.2 Forarbeid

Før observasjonene snakket jeg med informantene for å planlegge besøket og høre litt hva de tenkte å gjøre for å vurdere hvordan jeg best kunne observere det hele og på denne måten være litt forberedt. På forhånd hadde jeg også forberedt en god del sider som var delt inn i tre kolonner (se Figur 1 under).

<table>
<tr><th>Tid</th><th>Observasjon</th><th>Egne tanker</th></tr>
<tr><td>08.52</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>D: Hvordan teller man?
Elev: vanlig.
D: Ja, men hvordan er det?

Eleven viser ved å telle rad for rad.
D: Flott, men er det er en lurere måte å telle dem?
Elev 2: Man kan telle 5+5+5+5</td><td>Gir seg ikke med enkelt svar.

Elevene blir oppmerksom på at dette er en måte som fungerer men er tungvint.

Alle elevene er med. Ivrige.</td></tr>
</table>

Figur 1: Eksempel fra feltnotat fra observasjon hos Daniel i 3. klasse.

Her var altså én kolonne for klokkeslett, den neste for hva jeg faktisk observerte læreren gjorde eller sa og den tredje til eventuelle tanker og refleksjoner som slo meg underveis. I kolonnen for «tid» skrev jeg med ned klokkeslettet hver gang det ble skiftet aktivitet, eller gitt en ny oppgave. I tillegg prøvde jeg å skrive ned tiden innimellom hvis det ble jobbet med noe over lengre tid. På denne måten kunne jeg lett holde orden på hvor lang tid som ble satt av til forskjellige aktiviteter, oppgaver osv. I kolonnen for «observasjon» noterte jeg meg det som faktisk skjedde og noe av det som ble sagt. Under observasjonen måtte jeg her stadig holde fokuset på hva som var mest relevant å notere seg for min oppgave og fokusere på dette. Grunnen til at jeg ikke kan få med alt, er at det hele tiden skjer mye i et klasserom og det blir da umulig og få med seg alt samtidig som man skal notere det. I mitt tilfelle ble det derfor å fokusere på lærerens jobb, og det han eller hun gjorde som var spesielt relevant for problemløsningen. For å holde dette fokuset hadde jeg som sagt tidligere notert meg både problemstillingen min og noen forskningsspørsmål for å hjelpe meg å avgjøre hva som var viktig. Disse forskningsspørsmålene var:

1) *Har læreren alltid brukt problemløsning, begynte han plutselig med det eller har det vært et gradvis arbeid?*
2) *Hvordan introduserer og starter læreren arbeidet med problemløsning?*
3) *Hvordan hjelper han elevene når de trenger hjelp underveis?*
4) *Hvordan avslutter læreren en problemløsningsoppgave?*
5) *Hva er det læreren selv mener er viktig for å lykkes med å bruke problemløsning i matematikkundervisningen?*
6) *Hva er utfordringene med dette arbeidet?*

Den siste kolonnen kalt «Egne tanker» brukte jeg til å notere ting jeg kom til å tenke på der og da, eller følelser jeg satt med fra det som ble gjort. Det kunne for eksempel være når elevene virket veldig ivrige og engasjerte, eller når de begynner å virke ukonsentrert. På denne måten kunne jeg slippe tankene mine ved at de var notert, samtidig som dette var til god hjelp for å huske ulike situasjoner i etterkant. Ved å lage klar disse kolonnene på forhånd sparte jeg mye tid underveis i observeringen og jeg fikk i tillegg fokusere mere på å observere og få en grei oversikt over hva læreren gjorde.

3.6 Intervju

Ved intervju får man kunnskap basert på informantenes tolkninger og perspektiv og hvordan man som forsker igjen oppfatter dette. Med dette mener jeg at det intervjupersonen forteller vil være sagt ut ifra slik han eller hun har tolket og forstått dette. Gjennom det man får ut fra et intervju kan man derfor si noe om informantens oppfatninger og forståelse av det som skjer og blir gjort. Å forsøke og forstå verden sett fra informantens ståsted er noe som ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 20) er utgangspunktet for et kvalitativt forskningsintervju. For min forskning var det å forstå verden fra intervjupersonenes side nettopp et mål, og det var også derfor dette metodevalget var naturlig for meg.

Jeg valgte å ha en semistrukturert oppbygging av intervjuet. Det vil si at jeg hadde et intervju som er delvis strukturert og delvis åpent (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 46). Ved semistrukturerte intervju har man noen klare overordnede tema og spørsmål som man ønsker å finne svar på, men rekkefølgen man stiller dem flyter fritt med samtalen, og man kan tilpasse intervjuet til det enkelte tilfellet, ved å legge til og trekke fra spørsmål ut ifra relevans og interesse. Intervjuguiden min var delt inn i fem overordnede tema og hele 34 spørsmål som igjen hadde mulige tilleggsspørsmål[12]. Siden dette altså var en intervjuguide med mange spørsmål hadde jeg øverst skrevet fem hovedpunkter om hvor hovedfokuset skulle rettes, samt at jeg hadde markert de aller viktigste spørsmålene. Siden intervjuet som sagt var semistrukturert lot jeg det informanten til en viss grad styre retningen til intervjuet, med unntak av de markerte spørsmålene som jeg uansett stilte og som på denne måten til en viss grad styrte intervjuet.

3.6.1 Forarbeid

Informantene fikk ikke intervjuguidene på forhånd, men de fikk vite hvordan jeg definerer problemløsning i min oppgave og hva jeg mener med dette. I tillegg fikk de vite at det var deres erfaringer med og tanker om problemløsning som kom til å stå i fokus. Grunnen til at jeg valgte å gi informantene min definisjon og forklaring på hva matematisk problemløsning er og dermed gi dem en retningssnor på hva jeg ønsket å se etter og spørre om, var for å sikre et felles utgangspunkt. Siden målet ikke var å «teste» lærerne på om de kunne ulike definisjoner på problemløsning, gjorde det heller ikke noe at de fikk utgitt min definisjon. I tillegg er problemløsning innenfor matematikk noe som forstås på ulike måter da det har blitt lagt ulike forklaringer med hva som ligger i et matematisk «problem». Det viktigste for meg var å få observere arbeid med problemløsning og snakke om lærernes erfaringer på dette området, ikke nødvendigvis hva lærerne kalte denne arbeidsmåten. Om lærerne var opptatt av at det var problemløsning de arbeidet med, eller om det var en naturlig og integrert del av undervisningen som de ikke fokuserte eksplisitt på, var ikke avgjørende for meg, men heller noe av det jeg ønsket å finne ut.

3.6.2 Gjennomføring

Alle intervjuene ble holdt like etter observasjonene hos den enkelte lærer var ferdig. På denne måten kunne vi også snakke om det som hadde skjedd i timen der det falt seg naturlig eller hvis det var spørsmål angående det som ble gjort. Intervjuene ble gjort på de forskjellige skolene da dette var mest

[12] Se vedlegg

praktisk og naturlig, samtidig som dette gav intervjupersonene tryggere og kjente rammer. Alle intervjuene ble tatt opp på båndopptaker.

3.7 Behandling av innsamlet data

3.7.1 Etterarbeid observasjon

Underveis i observasjonene var det ikke alt jeg rakk å skrive og en del ble i stikkordsform. For å ikke glemme noe var det derfor viktig for meg å gå gjennom feltnotatene etter observasjonene før det gikk for lang tid. Når jeg gikk gjennom feltnotatene digitaliserte jeg dem og tilførte mere av det jeg husket skjedde eller ble gjort. Istedenfor den samme tredelingen jeg hadde i notatboka, valgte jeg på dataen og skrive mere utfyllende og med eventuelle tanker i kursiv. Dersom jeg fikk flere tanker om det jeg hadde observert mens jeg skrev notatene over på data, la jeg disse inn med rød skrift. På denne måten kunne jeg skille mellom hva som var spontane tanker og følelser under observasjonene, og hva som var mere reflekterte tanker når jeg så tilbake på det.

3.7.2 Transkriberingsmetode

Når man transkriberer gjør man en muntlig samtale om til tekst, og samtidig tas mye som muntlig og direkte naturlig var med på å gi og forsterke budskapet. Dette er viktig å være klar over, da man ved for stort fokus på selve transkripsjonen kan medvirke at analysen blir fragmentert (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 217). Ved transkripsjon prøvde jeg derfor å være så nøyaktig så mulig uten å henge meg helt opp i ordene, men ved å lytte til budskapet og meningen. Jeg valgte også å transkribere til standard bokmål. En ulempe med dette kan være å miste dialektbegrep som har en annen betydning, men jeg gjorde likevel dette for å prøve å få tydeligere frem det de sa og skjule deres identitet enda bedre. Samtidig var jeg oppmerksom på at jeg ikke skulle tolke noe, eller for mye, under transkripsjonen, og prøvde derfor å gjengi mest mulig ordrett og presist. Noen steder skrev jeg derfor små kommentarer til transkripsjonen for å huske på hvordan dette virket ment eller ble sagt til senere.

3.7.2 Analysemetode

Å analysere handler om å ta noe fra hverandre til enkeltdeler eller elementer (Kvale og Brinkmann, 2015, s. 219). Hvilken metode man skal, eller ønsker å benytte seg av for å analysere datamaterialet, er noe man ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 216) må ha klart for seg allerede før man lager intervjuguiden. Grunnen til dette er at man på denne måten kan la analysemetoden styre hvordan intervjuguiden utformes, utføres og transkriberes. Dette vil igjen gi et bedre grunnlag som også vil lette selve analyseprosessen fordi du allerede har startet å analysere i hodet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 216). Når man ønsker å bygge forskningen på grunnlag av egne data med mål om å utvikle ny teori, er det ifølge Thagaard (2013, s. 189) viktig å ikke bli knyttet til studiens teoretiske bakgrunn, men derimot være åpen for ulike tolkninger av de innsamlede dataene. Det ble derfor viktig for meg å forsøke å legge vekk teorien og holde fokus på det jeg fant interessant og typisk for mine data, uten å tenke for mye på teorien som allerede finnes på området. Først i etterkant så jeg på hva teorien sa og kunne vurdere mine data opp mot eksisterende teori ved å se etter strategier eller fokusområder i lærernes arbeid. Ut ifra dette ønsket jeg å kunne kjenne igjen eventuelle teknikker, strategier eller tankemåter som også er kjent fra teorien, for så å se hvordan dette ble forholdt seg til i praksis. I tillegg ønsket jeg å se om det som ble sterkest vektlagt i mine data, stemmer overens med det teorien sier eller ikke.

I min analyse har jeg valgt en kombinasjon av en temasentrert og en personsentrert tilnærming. Mens man ved en personsentrert tilnærming kan sammenlikne ulike tema innenfor en personenhet, og man ved tematiserte tilnærminger kan sammenlikne tema på tvers av ulike personenheter, kan en kombinasjon av disse gi grunnlag for en sammenlikning av temaer og personenheter (Thagaard, 2013, s. 189). En slik kombinasjon kan ifølge Thagaard (2013, s. 189) ofte være en fordel, og for min forskning var dette gunstig fordi jeg på denne måten kunne finne sammenhenger mellom hvordan det ble undervist i matematisk problemløsning og lærernes personlige erfaringer og holdninger til dette.

3.8 Reliabilitet, validitet og etikk

Forholdet mellom reliabilitet og validitet kan beskrives ut ifra en metafor. Dersom man kaster piler på en blink og sikter på midten, vil reliabiliteten avhenge av hvor tett man treffer med pilene sine. Reliabilitetens størrelse har ikke noe med hvor man treffer, men at kastene ikke treffer tilfeldig- du treffer rundt samme område med alle pilene. Skal man «treffe blink» må man derimot i tillegg til å ha høy validitet i kastene, faktisk treffe det man sikter på - midten av blinken. Høy reliabilitet er altså en forutsetning for høy validitet, men ikke omvendt.

3.8.1 Reliabilitet

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 276) handler reliabilitet om hvor troverdige forskningsresultatene er, og deres konsistens. Reliabilitet forbindes altså med forskningens pålitelighet og blir ofte sett på i sammenheng med hvorvidt forskningsresultatene kan reproduseres av andre forskere i ettertid (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Med andre ord har reliabilitet blant annet å gjøre med hvor transparent forskningen er, og i hvilken grad du som forsker påvirker resultatene du får inn. For å sikre reliabiliteten i min forskning har jeg forsøkt å legge frem det jeg har gjort på en redelig og nøyaktig måte. Under observasjonene valgte jeg å ikke være sammen med informantene eller andre lærere utenom det som dokumenteres av observasjon, intervju og den forberedende samtalen. I pausene når lærerne gikk på personalrommet, valgte jeg for eksempel å sitte igjen på klasserommet for å ikke påvirke mer enn nødvendig, eller prøve å styre samtalen så den ikke skulle ha innvirkning på undervisningen. I tillegg kom jeg til observasjonene, intervjuet like etter for så å forlate skolen. En ulempe av dette er igjen at jeg ikke fikk like god mulighet til å bli kjent med konteksten rundt problemløsningsarbeidet, men jeg fant likevel viktigere å prøve å sikre reliabiliteten som beskrevet over.

Ved at jeg hadde en tredeling av feltnotatene mine under observasjonene, fikk jeg også notert egne tanker og refleksjoner som oppsto der og da, noe jeg fant viktig fordi tanker og følelser kan være med på å påvirke hvordan jeg oppfatter det som skjer. Ved å notere ned disse underveis, kunne jeg om nødvendig ta stilling til dette senere og på denne måten få et slags metaperspektiv over situasjonen. I tillegg fungerte dette som hjelp for å huske hva som ble gjort. For å sikre reliabilitet i innsamlede data videre, var jeg rask med å transkribere intervjuene, samt å gå over å finskrive feltnotatene fra observasjonene. På denne måten satt alt friskt i minnet og ble derfor i større grad nøyaktig utdypet og formulert. Gjennom alle leddene i innsamling av data har jeg prøvd å ta på alvor at jeg er forskningsinstrumentet i min forskning og dermed er med på å påvirke resultatene.

3.8.2 Validitet

Validitet handler ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 276) om hvorvidt du måler og undersøker det du skal og sier. Maxwell (1992) viser til fem ulike typer validitet når det kommer til kvalitativ forskning. Disse er: *deskriptiv validitet, tolkende validitet, teoretisk validitet, generalisering* og *evaluerende validitet*. Evaluerende validitet er ikke aktuelt for mitt arbeid da også Maxwell (1992) peker på at forskere nødvendigvis ikke kan evaluere egen forskning.

Å sikre arbeidets validitet krever blant annet at valg av metode er fornuftig ut ifra problemstillingen, og at man klarer å være transparent. Ifølge Maxwell (1992, ss. 7-8) er dette den mest grunnleggende validiteten innenfor kvalitativ forskning. Denne validiteten kaller han deskriptiv validitet, og handler blant annet om at man ikke skal vri på hovedbudskapet og det som legges frem ved å vurdere deler opp mot helheten. Dette fokuserte jeg på ved å ta hensyn til helheten opp mot enkeltutsagn. For å sikre at metoden passet til problemstillingen min, valgte jeg metode ut ifra hvordan jeg på en best mulig måte kunne få svar på problemstillingen. Videre er det viktig at informantens mening og intensjoner kommer frem. Dette handler om det Maxwell (1992, ss. 10-11) kaller tolkende validitet, altså at man må sette seg inn i informantens situasjon og ta hans perspektiv for så å konstruere mening ut ifra informantenes ordbruk og begreper. Den teoretiske validiteten (Maxwell, 1992, ss. 13-14) handler om hvilke teorier man velger å lene seg på gjennom valg av begreper og kategorier, samt relasjonen mellom disse to. Denne validiteten vil jeg forsvare ved å sette meg godt inn i teorier og vurdere dem mot funnene mine ut ifra teoriens helhet, kontekst og med hensyn til om den er fra nyere tid eller ikke. Når det kommer til generaliseringen handler ikke dette om generalisering i seg selv, da dette ikke er et mål for kvalitativ forskning siden man her studerer bestemte fenomen eller tilfeller. Det handler derimot om at deler av forskningen, noen resultater, kan ha en overføringsverdi ved å være gyldig for samfunnet ellers eller i andre situasjoner som er like. Altså bør noe av forskningen kunne benyttes i en annen situasjon eller for noen andre. I mitt tilfelle har jeg prøvd å legge informantenes bidrag tydelig frem og drøfte dette slik at andre kan dra nytte av dette til egen praksis eller utvikling av læreplaner, kompetansemål og undervisning. I mitt arbeid har jeg tatt hensyn til alle disse fire typene validitet.

3.8.3 Etikk

Informert samtykke vil si at informantene både muntlig og skriftlig mottar informasjon om studien og skriver under på at de ønsker å delta i forskningen. Det er forskerens ansvar å sørge for at informantene har mottatt og forstått denne informasjonen, og at de er opplyst om at de når som helst frem til innlevering kan trekke tilbake sitt samtykke uten begrunnelse (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 104). I tillegg bør informasjonen opplyse om hvem som vil ha tilgang til opplysninger om dem, intervjuene og annet datamateriale som blir samlet inn.

Ifølge Kvale og Brinkmann (2015, s. 106) handler konfidensialitet som regel om at personidentifiserende opplysninger om informantene ikke kommer ut. Dette krever altså at man anonymiserer grundig og er varsom med hvor og hvordan man lagrer identifiserende informasjon. For å sikre konfidensialiteten har jeg vært nøye med å ikke ta med slik informasjon ved transkripsjon og notater, men heller kalt dem lærer A, B, C, D og E. I tillegg tok jeg alle lydopptakene fra intervjuene opp på båndopptaker som jeg lagret trygt slik at det bare var jeg som hadde tilgang på dem. I tillegg informerte jeg om dette og forsikret meg om at informantene var innforstått og enige i hva opptakene ville brukes til og hvordan de ble lagret.

I tillegg til informert samtykke og konfidensialitet er det viktig at man som forsker setter seg inn i de mulige konsekvensene forskningen kan ha for informantene på godt og ondt (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 107). På denne måten må man jobbe for å minke sannsynligheten for å fysisk eller psykisk skade de som velger å delta i forskningen. Selv om matematisk problemløsning ikke er et tema som i utgangspunktet trenger å bli så personlig, var det likevel viktig for meg å være oppmerksom på konsekvensene mine valg underveis kunne ha for informantene. For eksempel er jeg oppmerksom på at transkripsjonen ikke alltid vil gi et riktig bilde av informantenes mening og intensjon, fordi en samtale vi se annerledes ut på papiret enn i taleform. Dette prøvde jeg å ta hensyn til ved transkripsjonene, men senere også ved utvalg av sitater.

Mitt forskningsprosjekt var ikke meldepliktig til NSD. For å forsikre meg om dette las jeg forutsetningene for meldeplikt på nettet, tok testen NSD har for å avgjøre om forskningsarbeidetet er meldepliktig, samtidig som jeg ringte NSD og fikk snakke med to forskjellige saksbehandlere som begge betraktet det som «ikke meldepliktig».

KAPITTEL 4: Analyse og Drøfting

I dette kapittelet vil jeg analysere og drøfte mine innsamlede data, med hovedfokuset rette mot å komme frem til en besvarelse på problemstillingen min, som er:

Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av problemløsningsoppgaver på småskolen?

For å gjøre dette har jeg delt kapittelet inn seks delkapitler. I det første delkapittelet, *«4.1 Kort om observasjonene»,* vil jeg i korte trekk presentere den undervisningen jeg observerte hos de forskjellige lærernes klasse(r). Dette har jeg valgt å gjøre for å fremme konkrete eksempler på undervisningen, og dermed også belyse et eksempel på lærernes undervisning

ved bruk av problemløsning. På slutten av dette delkapittelet vil jeg drøfte funnene fra de forskjellige observasjonene.

De resterende fem delkapitlene har jeg valgt på grunnlag av forskningsspørsmålene mine, som er:

1) *Har læreren alltid brukt problemløsning, begynte han plutselig med det eller har det vært et gradvis arbeid?*
2) *Hvordan introduserer og starter læreren arbeidet med problemløsning?*
3) *Hvordan hjelper læreren elevene når de trenger hjelp underveis?*
4) *Hvordan avslutter læreren en problemløsningsoppgave?*
5) *Hva er det læreren selv mener er viktig for å lykkes med å bruke problemløsning i matematikkundervisningen?*
6) *Hva er utfordringene med dette arbeidet?*

Grunnene til at jeg har valgt å dele kapittelet inn ut ifra disse, er at jeg gjennom å svare på forskningsspørsmålene, vil fokusere på å belyse sentrale deler av problemstillingen min, da forskningsspørsmålene, med grunnlag i tidligere forskning på problemløsning, er valgt nettopp for å belyse problemstillingen. Da jeg laget disse forskningsspørsmålene tok jeg blant annet utgangspunkt i Mason m.fl. (2010) sin inndeling av problemløsningsfasen i tre hovedfaser: «Entry», «Attack» og «Review». Med disse tre fasene som utgangspunkt for problemløsningsarbeidet, valgte jeg å rette oppmerksomhet på lærerens innledning av problemløsning, hvordan læreren hjelper elevene underveis (siden en naturlig del av problemløsningsarbeidet, ifølge blant annet Schoenfeld (1980), Polya (2009) og Mason m.fl. (2010) er å stå fast) og hvordan læreren avslutter problemet. Ut ifra disse tre kategoriene kom jeg dermed frem til forskningsspørsmål 2, 3 og 4.

I tillegg til å gjennom disse tre kategoriene rette oppmerksomhet på selve problemløsningsprosessen, fant jeg det nødvendig og også si noe om hvordan og hvorfor lærerne begynte å arbeide gjennom problemløsning, da undervisning gjennom problemløsning ifølge Polya (2004) kan kreve både tid, øvelse og hengivelse fra læreren. Ut ifra dette kom jeg dermed frem til forskningsspørsmål 1.

Når det kommer til de to siste forskningsspørsmålene, er disse valgt med den hensikt å rette oppmerksomheten mot hva informantene ser på som spesielt viktig og spesielt utfordrende i problemløsningsarbeidet. Disse to forskningsspørsmålene er derimot ikke å finne som egne delkapitler, fordi jeg heller har valgt å presentere hva læreren fant som spesielt viktig eller utfordrende, etterhvert som det aktuelle temaet blir analysert og drøftet. Synes læreren det for eksempel er spesielt utfordrende å introdusere et problem, vil jeg komme inn på dette under delkapittelet som omhandler introduksjonen av et problem.

I tillegg til de delkapitlene jeg konstruerte ut ifra forskningsspørsmålene, fant jeg det ut ifra analysematerialet, nødvendig med et ett ekstra delkapittel for å belyse de delene av lærerens rolle som ikke direkte handler om noen av fasene i problemløsningen. Jeg har ut ifra dette laget et nytt forskningsspørsmål å besvare: «*Hva er generelt viktig for å legge til rette for matematisk problemløsning på småskolen?»*. Delkapittelet som besvarer dette spørsmålet jeg valt å kalle «*Lærerens rolle*» omhandler dermed lærerens mer generelle oppgaver, som å blant annet fremme en god læringskultur i klassen og valg av problemløsningsoppgaver.

Inndelingen av dette kapittelet, ble derfor som følger:

4.1 Kort om observasjonene

4.2 Om lærerne

4.3 Lærerens rolle

4.4 Introduksjon av problem

4.5 Hjelp underveis

4.6 Avslutning av problem

Under hvert av disse seks delkapitlene legges det først frem en analyse av datamaterialet jeg samlet inn fra de fem informantene mine. Dette blir gjort gjennom underkapitler med fokus på én og én informant. På slutten av hvert delkapittel, finnes det så et eget underkapittel (som for eksempel «*4.3.6 Drøfting: introduksjon av problem*»). I disse drøftingsdelene av delkapitlene, vil jeg drøfter analysematerialet i gitt delkapittel, opp mot kunnskapsgrunnlaget og egne tanker. I denne drøftingsdelen vil jeg også sammenlikne og vise til forskjeller mellom informantenes fokus på området. Grunnen til at jeg har valgt å dele delkapitlene inn på denne måten, er at jeg vil bevare oppmerksomheten mot de ulike kategoriene jeg fant nødvendige å besvare for å finne svar på problemstillingen min. På denne måten kan jeg lettere plukke opp trådene og presentere hovedfunnene mot en besvarelse av problemstillingen.

4.1 Kort om observasjonene

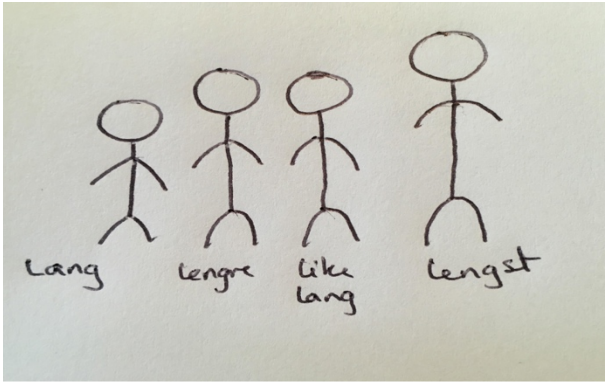
4.1.1 Annes 1. klasse

Hos Anne observerte jeg arbeid med sortering. Anne starter timen med å snakke sammen med elevene om ting man kan sortere og hvordan. Hun forklarer at man ved sortering setter de tingene man synes er like sammen. Læreren finner så frem en side på den digitale tavlen med bilder av ulike ting og kasser under. En og en elev får komme frem å sette strek fra hver ting ned i eskene og på denne måten sortere det. Anne påpeker at *«det er flere måter å sortere på, og alt er rett så lenge man kan forklare hvorfor».* Etter at seks elever har fått sortert tingene på den digitale tavlen på sin måte, skal elevene parvis sortere forskjellige ting på plassene sine. Elevene får utdelt forskjellige ting som skal sorteres. Noen skal sortere innesko, noen får laminerte tegninger av elevene og andre får forskjellige leker og Lego. Elevene skal jobbe sammen og finne flere forskjellige måter de kan sortere på. Når de har jobbet en stund og har funnet flere mulige sorteringsmåter, bytter de ting med et annet par. Etter en halvtime med sortering på denne måten, ryddet elevene opp leken og Anne ba elevene fortelle hva de hadde sortert og hvordan. De gikk gjennom alle tingene som hadde blitt sortert og Anne spurte om det var noen som hadde sortert de forskjellige på andre måter. Etter denne oppsummeringen fikk elevene et lite friminutt.

Etter friminuttet arbeider de i plenum. Anne presenterer fire og fire ting for elevene og de skal argumentere for at en av tingene ikke passer inn. Den første oppgaven er her tallene 1, 2, 4 og 6. Elevene kommer med forslag til hva som ikke passer inn og hvorfor. Etter flere forslag og begrunnelser går de til neste oppgave som er bilder av en bil, en båt, et fly og en bobil. Elevene er engasjerte og nysgjerrige og vil gjerne vite hva som er det rette svaret. Anne forklarer at alle svarene de har gitt er riktige, fordi de har begrunnet svaret og funnet måter de forskjellige ikke passer inn på.

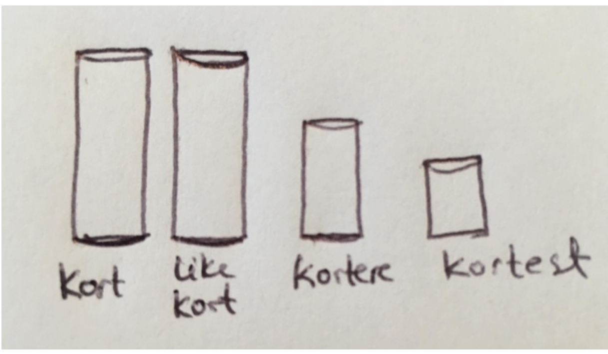
4.1.2 Benjamins 1. klasse

I Benjamins klasse arbeidet de med måling. Timen startet med at Benjamin spurte om hva elevene tenkte hvis han sa at de skulle ha om måling, og deretter om hva man kan måle. Læreren hadde så tegnet fire personer på tavlen.



Figur 2: Egen tegning lik den læreren tegnet på tavlen for elevene.

Hun sa så som følger: «*Hvis jeg sier at den første personen her er lang, hva er da den neste?».*
Elevene kom frem til at den neste var lengre, og på samme måte at den neste var like lang som den ved siden av, og at den siste var lengst. Videre presenterte læreren en ny tegning for elevene:



Figur 3:Egen tegning lik den læreren tegnet på tavlen for elevene.

Læreren sa så: «Hvis jeg sier at den første boksen her er kort, hva er den neste da?». Elevene kom så fram til at denne var like kort, den neste var kortere og at den siste var kortest. Benjamin forklarer så at dette er ord for måling som de nå skal jobbe med ute. Gruppene ble delt inn i seks grupper og ute hadde læreren gjort klart seks poster som de skulle jobbe med i gruppene. Før de gikk ut gikk læreren gjennom postene:

Post 1: Plasser dere i rekkefølge etter hvor langt hår dere har.

Post 2: Der ligger det en pinne, dere skal finne noe som er lengre, noe som er kortere og noe som dere tror er like langt, uten å ta med pinnen rundt.

Post 3: Hvor mange musesteg er det mellom de to trærne?

Post 4: Er jeg [Benjamin] kort eller lang og hvorfor det?

Post 5: Hvor langt er det rundt treet? På denne posten lå det et tau de kunne bruke om de ville.

Post 6: Terningspill hvor de skulle trille terning hver sin gang og få hoppe like mange hopp som de fikk prikker på terningen. Førstemann fra startstreken til målstreken er vinneren.

Når elevene var er ferdige med en post skulle de komme til Benjamin for å bli sendt på neste post. Da alle hadde svart på alle postene gikk de inn for oppsummering og avslutning. Benjamin sier til elevene at han er spent på å høre hva de fant ut på de forskjellige postene, før han gikk gjennom en og en post med elevene og spurte hvordan de forskjellige gruppene hadde løst oppgavene, samt om de synes det var vanskelig eller greit. På den første posten var det for eksempel en gruppe hvor to av jentene hadde tilsynelatende like langt hår. Lærer tok jentene frem og demonstrerte dette for klassen før hun spurte dem hva de kom fram til på denne første posten. Elevene hadde her funnet ut at siden den ene jenta var litt høyere, var hennes hår lengst. Videre diskuterte de også hvorfor gruppene på oppgaven med musesteg fikk forskjellige svar. Elevene fant da ut, ledet av læreren, at elevene hadde tatt musesteg på litt ulike måter, at de hadde ulik størrelse på føttene og at de kunne gått litt ulike veier mellom trærne. De kommer da inn på hvordan man kunne ha funnet et likere svar og hvorfor de tror man fant opp meter og andre måleenheter.

4.1.3 Cecilies 2. klasse

Hos Cecilie fikk jeg observere en dobbelttime med statistikk hvor elevene skulle ut på skolens parkeringsplass å telle biler. Cecilie startet timen med å spørre elevene om noen visste hva det heter når man samler og sorterer i for eksempel søyler. Da elevene ikke visste dette, forklarte hun at vi kaller det å lage statistikk og at det skal gi oss en oversikt. Deretter spurte hun elevene om forslag til hva man kunne sortere. Etter hvert forslag spurte hun hvordan det foreslåtte kunne sorteres. Etter en del forslag spurte hun om det var noe de kunne sortert ute på parkeringsplassen. Cecilie påpekte at det måtte være noe som var greit for alle å sortere. Elevene kom frem til at biler var greit å sortere dersom man gjorde det etter farge. Cecilie svarer at *«da synes jeg vi skal gjøre det»,* men at de først måtte avgjøre hvilke kategorier de skulle sortere i. Elevene ramser opp mange farger og læreren skriver dem på tavla. Før de går ut for å begynne må elevene skrive de fargekategoriene de vil sortere bilene inn i. Påpeker at de må ha plass til å sette tellestreker eller tall til hver farge. Lar elevene velge farger selv og organisere dette på sin egen måte. Når elevene er klare får de gå ut å begynne.

Etter en stund ute går alle inn igjen for oppsummering og avslutning. Læreren spør elevene hvordan fremgangsmetode de brukte for å sortere alle bilene, hva som eventuelt ble utfordrende og hvordan det kunne vært gjort lettere. Etter denne oppsummerende samtalen får alle elevene et kopiark med søyler, hvor de skal skrive inn antall biler og farge, for så å fargelegge søylene. Hun demonstrerer hvordan de skal gjøre det på tavlen før elevene får sette i gang selv.

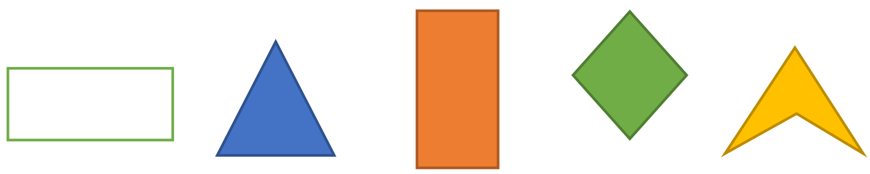
4.1.4 Daniels 3. klasse

Hos Daniel fikk jeg observere hvordan elevene på 3. trinn fikk «oppdage» multiplikasjon på egenhånd, ved at Daniel diskret ledet dem i riktig retning og hjalp dem på vei. Etter oppstarten fikk elevene i oppgave å tegne opp forskjellige rektangler i ruteboken sin, for så å finne ut hvor mange ruter fra ruteboken som var inni rektangelet. Læreren ledet denne problemløsningen ved at det var han som bestemte hvilke rektangler elevene skulle tegne. Dette gjorde de altså i lag, og den første firkanten de tegnet skulle være fire ruter ned og fem ruter til siden. Når elevene skulle finne antall ruter spurte han hele tiden etter den lureste måten å finne antallet på, og ledet elevene på denne måten elevene til å tenke nytt. Etter to slike oppgaver, kom det en ny vri- læreren tegnet et rektangel bestående av 7*10 ruter, for så å skravere 3*3 ruter inni. Han forklarte at dette var en sjokoladekake og at noen hadde spist de skraverte rutene. Elevene skulle da finne ut hvor mange ruter det var igjen. Når elevene fant svar på dette fikk de enda en ny oppgave; *«tegn en firkant med 100 ruter inni»*. Alle elevene måtte selv tegne opp i ruteboka si, men de satt i grupper og skulle så snakke sammen og bli enige om antall ruter før de tok det i plenum. Dette var altså en dobbelttime hvor elevene vekslet jevnlig mellom å arbeide selvstendig, i grupper og i plenum.

Etter en halvtime med dette arbeidet gikk Daniel over til å ha en quiz hvor elevene arbeidet i de gruppene de satt i. Dette sa Daniel i intervjuet at han gjorde han for å variere undervisningen og på nytt fange konsentrasjonen til elevene. Denne quizen handlet stort sett om multiplikasjon så elevene fikk samtidig prøve seg på det de nettopp hadde «oppdaget». Quizen ble utført ved at hver gruppe fikk et ark som de brettet tre ganger for å få åtte ruter. Læreren kom så med seks oppgaver som de skulle gi svar på i hver rute. Disse oppgavene var følgende:

1) 5*10
2) 3*4
3) 2+2+2+2+2
4) 10*100
5) 10*5
6) Busstur hvor passasjerer gikk av og på bussen på ulike stopp.
7) Hvilken form passer ikke inn?
8) 5*5

Elevene fikk her beskjed om at de gjerne kunne tegne ruter eller bruke andre måter de synes var gode for å finne svaret. På busstur oppgaven tegnet Daniel en buss på tavlen som så stoppet på 5 stopp. På hver stopp gikk folk på og/eller av. Elevenes oppgave var å finne antall passasjerer etter siste stopp. På oppgave 7) var formene elevene skulle vurdere følgende:



På denne oppgaven ble det avgitt tre forskjellige svar: «*den hvite, fordi den er uten farge*», «*den blå fordi den har tre kanter*» og «*den gule fordi formen er spesiell*». Her fikk alle som kunne begrunne svaret sitt poeng. Læreren sa det var gode svar, men at dersom en skulle snakke matematikk var det den blåe som var riktig siden den var den eneste trekanten. Når quizen var ferdig fikk elevene spille spill resten av timen.

4.1.5 Emilies 2. klasse

På 2. trinn fikk elevene først i oppgave å være talldetektiver. Her skulle de finne ut hvilket tall som var skurken ut ifra en rekke ledetråder som var oppgitt. Disse ledetrådene var:

- *Tallet har 2 siffer*
- *Begge sifrene er partall*
- *sifferet på tierplass er større enn sifferet på enerplass*
- *sifferet på enerplass er ikke i tregangen*
- *sifferet på tierplass er ikke dobbelt så stort som sifferet på enerplass*
- *Summen av de to sifferne er et tall i femgangen*

Ved hjelp av disse ledetrådene skal elevene sitte igjen med ett av følgende ni tall: 120, 8, 18, 83, 46, 22, 86, 42 og 64. Denne oppgaven gjorde de i fellesskap og læreren gjorde elevene oppmerksomme på strategivalgene de tok. For å komme frem til hvem som var skurken ledet læreren dem gjennom en og en ledetråd og krysset ut de tallene det ikke kunne være. Dette ble gjort på følgende måte: *Tallet har 2 siffer. Er det noen som vet hva et siffer er? Hva er forskjellen på tall og siffer?* Elevene er usikre men lærer forklarer forskjellen, deretter spør han: *Er det noen tall som består av mer eller mindre enn to siffer her?* Elevene kommer frem til at 120 og 8 må være feil siden de ikke har to siffer. Lærer krysser ut og går til neste ledetråd. Lærer jobber seg gjennom alle ledetrådene sammen med elevene på denne måten, for så å sitte igjen med tallskurken. De kontrollerer så svaret for å sjekke at det er riktig.

Etter dette fikk elevene den problemløsningsoppgaven de selv skulle jobbe med resten av timen. Oppgaven lød som følger:

> *«Noah så 12 ben som gikk ombord i båten. Hvor mange dyr kan han ha sett? Hvor mange forskjellige svar kan du finne? Kan du forklare hvordan du kom frem til de forskjellige svarene?»*

Det var også bilde av dyrene som kunne ha gått ombord mens Noah så på, og disse var struts, hund, edderkopp, marihøne, snegle og pinnsvin. Det kunne også maks være to av hvert dyr. Før de begynte gikk Emilie gjennom hvor mange ben de forskjellige dyrene hadde, og noterte dette ved siden av hvert bilde. Den første mulige kombinasjonen fant klassen ledet av læreren i plenum. Emilie spurte om det var noen av dyrene som hadde 12 ben, slik at det på denne måten kunne vært bare 1 dyr som hadde gått ombord. Dette fant de at ikke kunne være tilfelle, før de prøvde seg på 2 dyr. De fant da at det kunne ha vært 2 marihøner Noah hadde sett. Etter dette fikk elevene arbeide selvstendig for å finne flere mulige kombinasjoner. I tillegg tok læreren ordet innimellom for å komme med tips eller forklare oppgaven grundigere. Mot slutten hadde de en felles gjennomgang hvor læreren presenterte alle de ulike kombinasjonene elevene hadde funnet, samt hvordan de hadde funnet dem. Dette gjorde han ved å spørre elevene og demonstrere på tavla. Deretter systematiserte læreren tankegangen deres for å finne resten av mulighetene. Dette gjorde han ved å si de skulle ta for seg ett og ett dyr og finne ut om det var flere muligheter hvor dette dyret skulle være med. Elevene fikk jobbe litt til, mens læreren ledet de i plenum underveis ved å etter en stund notere mulige kombinasjoner på det aktuelle dyre og sette dem i gang med et nytt dyr, hvor da det foregående dyret skulle ekskluderes, siden alle mulighetene der det dyret var med, allerede var funnet. Helt til slutt hadde de funnet alle mulighetene, og læreren gikk gjennom hvordan de hadde jobbet for å finne dem.

4.1.6 Emilies 3. klasse

På 3. trinn arbeidet også elevene selvstendig. Før de fikk oppgaven forklarte læreren at de skulle arbeide med problemløsning og hva dette gikk ut på. Samtidig minnet han dem på å bruke «Hauk» underveis i arbeidet. «Hauk» er en læringsstrategi som sier at elevene først skal fokusere på *hva* spørsmålet er, deretter skal de lage en *arbeidstegning.* Underveis skal de fokusere på *utregningen* sin, og til slutt må de *kontrollere* svaret sitt. Hvis elevene står fast skal de følge «Hauk» for å se om det kan hjelpe dem videre, før de evt. spør om hjelp. Oppgaven elevene fikk denne dobbelttimen var å finne hvor mange blader 12 larver spiser hvis vi vet at 2 larver tilsammen spiser 5 blader. Det ble påpekt at det viktige med oppgaven var å vise hvordan man tenkte og jobbet for å komme frem til svaret. På slutten av timen oppsummerte de ved at Emilie viste noen ulike strategier og fremgangsmåter hun hadde sett rundt i klasserommet, i tillegg til hvordan hun selv tenkte det kunne gjøres, og slik kom de sammen frem til svaret.

4.1.7 DRØFTING: Kort om observasjonene

I Annes 1. klasse fikk elevene en veldig åpen oppgave som hadde mange løsningsmetoder og lav terskel. Dette er noe som ifølge Polya (2009) gir elevene mulighet til å arbeide med oppgaven ut ifra egne forutsetninger. Dette vil igjen gi et godt grunnlag for at elevene sendere kan dele ulike løsningsmetoder, som er en viktig del av problemløsningsarbeidet (Lester og Labdin, 2006; Breiteig, 2008; Grevholm, 2013), noe Anne også fokuserer på ved avslutningen av problemet.

I Benjamins 1. klasse arbeider elevene med problemer i grupper gjennom ulike poster. Ved oppsummeringen av postene, var det også en oppgave som synes det var urettferdig at det ble ulike svar på musestegoppgaven. Ut ifra dette fikk Daniel elevene til å drøfte hvorfor svarene ble annerledes og hva de kunne brukt for å få dette mere rettferdig. På denne måten fører Benjamin elevene mot å oppdage nødvendigheten av standard måleenheter. Etter å ha latt elevene diskutere en stund stiller

Daniel det tankevekkende spørsmålet «*hvorfor tror dere de fant opp meter?»*. På denne måten fikk elevene undre seg over, samt oppdage matematikk, noe som både ifølge Lester og Lambdin (2006) og Breiteig (2008) er en viktig del av lærerens rolle å legge til rette for.

I Cecilies 2. klasse skulle elevene sortere biler på parkeringsplassen ut ifra farge. Elevene sto fritt til å antall farger selv, etter at de i fellesskap gikk gjennom hvilke farger bilene brukte å ha. I denne oppgaven var det flere elever trengte hjelp til å finne løsningen på oppgaven fordi de hadde tatt med veldig mange farger. De hadde på denne måten tatt i bruk en strategi som ikke var egnet for oppgaven. Ved å diskutere hva som var lurt og hva som ble vanskelig med elevene i plenum tilslutt, fikk Cecilie retter fokus mot elevenes løsningsstrategier og ideer. At en slik vinkling med fokus på løsningsprosessen er viktig for å fremme elevenes læring og forståelse er det stor også enighet om innenfor tidligere forskning (Hiebert, 1997; Boaler, 2003; Yackel & Cobb, 1996; Grevholm, 2013; Breiteig, 2008).

I Daniels 3. klasse jobbet læreren med mange små problemer. Selv om elevene hadde en strategi for å finne svaret ganske umiddelbart, nemlig ved å telle, vil jeg likevel kalle det små problemer, da de måtte prøve å komme frem til nye og smarte metoder som ikke virket opplagt for dem i starten. Det var spesielt oppgaven med kakestykkene som manglet, oppgaven med å tegne en firkant med 100 ruter og quizen hvor de fikk oppsatte multiplikasjonsstykker som fremsto som problemløsning for elevene. Disse tre oppgavesortene gjorde at elevene måtte tenke nytt og det virket for meg som at de ikke så en fullstendig fremgangsmåte for å løse oppgaven med det samme de fikk oppgaven. Daniels undervisning var heletiden rettet mot å finne en lurere løsningsmåte. Slike oppfordringer om å bruke lurere måter er ifølge Hiebert, m.fl. (1997) må unngås dersom det tar fra elevene forståelsen, hvis ikke må slike oppfordringer behandles med varsomhet, da elevene kan oppfatte det som kritikk. Til tross for dette opplevde jeg ikke denne oppfordringen til å tenke smartere som noe negativt. Jeg tolker dette dit hen at dette ble gjort ut ifra elevenes premisser slik at de beholdt forståelsen og tankemønsteret.

Problemløsning vil ofte handle om å finne mange fremgangsmåter som elevene deler med hverandre og beriker hverandres tankegang gjennom mangfold (Grevholm, 2013). Et slik mangfold av løsningsstrategier var noe jeg i aller høyeste grad fikk observere Emilies problemløsning, da hun på slutten av timene lot elevene forklare hva de hadde tenkt, mens hun hjalp dem å videreføre denne tankegangen til resten av klassen, ved å demonstrere på tavlen og uttrykke det med matematisk språk. Å hjelpe elevene å videreformidle tankene sine på denne måten er noe som ifølge Grevholm (2013) en viktig del av lærerens rolle ved problemløsning. Slik jeg oppfattet det behersket Emilie denne avsluttende delen av problemløsning svært godt. Hun la også mue vekt på denne delen at timene, og ifølge Mason m.fl. (2010) og Polya (2004) er fokus på denne sluttfasen veldig viktig for å kunne ta med seg nye strategier til videre læring.

4.2 Om lærerne

I dette delkapittelet vil jeg svare på hvor lenge informantene har arbeidet med matematikk gjennom problemløsning og hvordan denne overgangen er eller har vært for dem.

4.2.1 Anne

Til tross for at hun har spesifisert seg i matematikk gjennom utdanningen, er det i år første gang Anne underviser i matematikk. Både matematikkundervisning og arbeid med problemløsning er på denne måten både helt nytt for henne og for elevene som nettopp har startet i 1. klasse, *«det er jo ganske nytt for meg. [...] vi har jo ikke hatt det så mye enda»*. Anne sier likevel at hun gjerne vil jobbe med problemløsning og synes da det er enklere når elevene kan jobb parvis slik at de kan diskutere litt med hverandre underveis. Hun viser til at det ofte kan være vanskelig å strekke til dersom elevene sitter og arbeider med oppgaver selvstendig, og mange trenger hjelp samtidig, *«jeg liksom bare én, så springer jeg liksom rundt da»*. Noe Anne peker på som spesielt utfordrende for seg selv som ny matematikklærer, er likevel det å gå utenom arbeidsboka gir, *«det er litt sånn betryggende å bruke den* [arbeidsboka i matematikk]*»*. På grunn av dette sier hun at hun har brukt matematikkboka mer i undervisningen mer enn hun i utgangspunktet hadde planlagt, og at hun ønsker å få til mere problemløsning med elevene.

Anne sier videre at elevene ofte er opptatte av å vite hvordan de skal arbeide og hva som er det riktige svaret. Hun forsøker derfor å la elevene diskutere litt med hverandre og forstå at det er flere mulige fremgangsmåter, *«for å få dem til å tenke litt på en annen måte»*. I tillegg kan de på denne måten finne ut at det også noen ganger kan være flere riktige svar, avhengig av hva man skal finne og hva man legger i oppgaven. En viktig grunn til å arbeide med problemløsning blir derfor, ifølge Anne, å få frem ulike fremgangsmåter og svaralternativer, samtidig som det gir elevene trening i å uttrykke tankene sine,

> *«at det er mange forskjellige måter man kan jobbe med, og at det er ikke bare ett svar som er riktig. Men også det å kunne forklare hvordan man tenkte, eller hvorfor, altså argumentere for hvorfor svaret er rett».*

4.2.2 Benjamin

Benjamin sier at han har arbeidet med problemløsning i matematikk i rundt 10 år. Det å arbeide på denne måten kom for han litt automatisk, *«litt sånn etterhvert som jeg jobbet en stund [...] når man er trygg på å være i klassen, kommer det liksom litt av seg selv».* Han viser også til at man må kjenne elevene litt, *«jo bedre jeg kjenner elevene, jo lettere er det [problemløsning] å bruke».* Benjamin synes det er kjekt å arbeide med problemløsning i matematikken og gjennom dette få høre hvordan elevene tenker. I tillegg sier han at også elevene synes slik arbeid er kjekt, fordi de får gjøre det til sitt eget.

Benjamin sier at det er viktig å starte med matematisk problemløsning allerede i 1. klasse, *«det er det med å få i gang de prosessene i hodet til elevene».* Dette påpeker han som viktig for at elevene fra starten av skal forstå at det ikke bare er en måte å tenke på eller at læreren besitter den eneste løsningsmetoden, *«at de også kan sitte på gode løsninger»*. I tillegg må man alltid prøve å få alle elevene med, og få dem til å tenke gjennom hvorfor ikke alle alltid får samme svar på alle oppgaver, og hvordan de tenker forskjellig, «*det er liksom ikke nødvendigvis et riktig og et feil svar».*

4.2.3 Cecilie

Cecilie begynte så vidt å bruke matematisk problemløsning i fjor, da klassen hun fremdeles har, gikk i 1. klasse. I år har hun brukt det litt mere enn i fjor, og hun ønsker å bruke det enda mere fremover, men som hun sier, *«[jeg] har ikke så mye erfaring med det ennå».* Videre påpeker Cecilie at det først er når elevene har jobbet en del med problemløsningsoppgaver med faste rammer, at de kan prøve seg mere på egenhånd, *«Etterhvert får man heller gi større problem og mer som de kan finne ut av selv».* Grunnen til at Cecilie ønsker å fortsette med å arbeide med matematisk problemløsning er for å åpne opp for flere tenkemåter *«også gi dem ulike måter å tenke på. Gjøre undervisningen spennende».*

4.2.4 Daniel

Selv om Daniel den dag i dag bruker mye problemløsning og variert arbeid i undervisningen sin, har det ikke vært slik bestandig, *«Slik underviste jeg ikke for 30 år siden».* Han legger til at han da hadde mye mer fokus på selvstendig mengdetrening, *«da var det mye mer etter boken, sånn side etter side etter side».* Slik arbeid sier han videre at ikke gir elevene rom til å tenke, *«Det er ingen forståelse».* Å bli god til å undervise gjennom problemløsning, og på denne måten la elevene tilegne seg forståelse for matematikk, er derimot ikke noe man lærer seg over natten, *«det krever altså erfaring, det er bare sånn*». Selv sier han at han har eksperimentert mye dem forskjellig undervisning for å komme seg dit han er i dag, *«Jeg liker å prøve nye ting».* Da Daniel begynte å arbeide med problemløsning planla han mye for å få det til, «*da tenkte jeg mye over hva jeg gjorde*», men nå som han har jobbet med det i veldig mange år ligger det bare naturlig for han, *«det ligger sånn i meg at jeg tenker ikke over det så mye mer».*

Daniel sier at han arbeider med problemløsning fordi det er slik man lærer matematikk, *«det er en måte å få lure ideer på».* Han sier også at *«jeg tror det er den måten at vi utvikler oss som samfunn på».* Problemløsning handler for Daniel om å finne ut hva oppgaven spør etter og handler om, og hvordan man kan løse den.

4.2.5 Emilie

Emilie har undervist med bruk av mye problemløsning i 3 år. Ved å arbeide med problemløsning sier Emilie at elevene vil lære å finne egne løsninger gjennom egen forståelse av oppgaven, i tillegg til at slikt arbeid er mere virkelighetsnært, *«At du lærer deg på egenhånd, at det ikke er en lærer som står og sier at sånn er best der og sånn bør du gjøre der[...]. Du må jo tenke litt selv».* Emilie sier altså at problemløsning vil hjelpe elevene til å «*tenke selv*» og finne smarte løsninger på egenhånd. På denne måten blir elevene trent til å stole på seg selv og til å bruke de erfaringene og kunnskapene de selv har til å tenke rasjonelt og fornuftig. I tillegg gjør dette elevene rustet til å møte problemer i virkeligheten.

Fordi oppgavene arbeides med ut ifra elevenes forutsetninger, sier Emilie at samme oppgave ofte kan brukes på flere klassetrinn, *«du kan egentlig gi den samme oppgaven, ja, sånn som den vi hadde nå da, den har jeg jo gitt i 7. og på 2. trinn, og de har fått den til».* Emilie begrunner dette med at elevene på ulike trinn, eller nivå, vil løse den ved hjelp av ulike løsningsstrategier og på ulike nivå. Hun forklarer også at elevene bør starte med problemløsning allerede fra 1. klasse, *«det er ikke noe man må vente med egentlig, de kan begynne med det så tidlig som mulig».* En annen faktor og grunn til å arbeide med matematisk problemløsning er at det, ifølge Emilie, er motiverende og sosialt for elevene ved at de får lærerike innspill fra medelever, *«det er engasjerende for elevene, det er gøy, også lærer de mye av hverandre».* Elevene Emilie har hatt har stort sett synes problemløsning er en kjekk måte å arbeide med matematikk på.

4.2.6 DRØFTING: Om lærerne

Å undervise i problemløsning er noe som ifølge Polya (2004) både kan krever øvelse, tid og hengivelse fra læreren. Når det kommer til å ha øvelse gjennom arbeid med problemløsning, utpeker

Benjamin, Daniel og Emilie seg med mest erfaring, da alle disse tre informantene påpeker at de bruker det mye i undervisningen, mens Anne og Cecilie ikke bruker det like mye. Selv om det er Benjamin og Daniel som har flest års erfaring, har Emilie også mye erfaring til tross for at hun bare har undervist på denne måten i 3 år. I tillegg til å bruke det mye i undervisningen, er Emilie den eneste av informantene som ikke er kontaktlærer og den eneste som bare underviser i matematikk. Hun er også innom flere trinn og har erfaring med å prøve like problemer på ulike trinn og nivå.

Ut ifra analysene av datamaterialet mitt, finner jeg at Anne og Cecilie, som er lærere på samme skole, ofte har tilnærmet like svar. Dette var også noe jeg så for meg kunne oppstå, siden de virket som å ha et tett samarbeid. Det er derfor mulig at de kanskje har diskutert temaer rundt problemløsningsarbeidet med hverandre før jeg kom. Jeg må likevel påpeke på at dette ikke nødvendigvis er tilfelle, da begge har ganske like forutsetninger for å undervise i matematiske problemløsning, ved at det for begge er ganske nytt å arbeide på denne måten, og at de i tillegg arbeider på samme skole og deler tanker med hverandre. Disse to kan begge også ha vært påvirket av Daniel til å arbeide på denne måten, da han også arbeider på samme måte og har mye erfaring på området. Dette ser jeg eventuelt likevel på som bra, da et slikt arbeid er krevende for læreren, noe som eventuelt viser at de begge har pågangsmot og vilje til å prøve.

4.3 Lærerens rolle

I dette delkapittelet vil jeg svare på hva informantene ser på som lærerens generelle rolle ved problemløsning og på hvilket grunnlag de generelt velger problemløsningene de arbeider med.

4.3.1 Anne

Som lærer sier Anne det er viktig å være åpen for å ikke alltid måtte ha kontrollen og fasitsvar, *«å undre deg sammen med elevene da»*. Videre sier hun også at det å fremme gode samtaler er viktig, og at dette også er noe som er veldig egnet med førsteklassinger siden de gjerne er med i diskusjoner og undrer seg over det meste, *«så det er jo noe du har muligheten til når de er så små da»*. Gjennomgående sier Anne at det uansett er viktig å variere undervisningen, og til dette synes hun stasjonsarbeid egner seg spesielt godt.

En av de tingene Anne påpeker som viktig når hun skal velge ut oppgaver elevene skal arbeide med, er å *«knytte det til tema som angår dem, til dagliglivet altså»*. For å gjøre dette sier hun det kan være nyttig å la elevene bruke kroppene sine og konkreter når de jobber. I tillegg påpeker hun at problemene, må være interessante for alle elevene, *«de må fenge dem*». Dette er også noe Anne peker på som utfordrende ved å finne gode problemløsningsoppgaver.

Noe Anne peker på som spesielt utfordrende for seg selv som ny matematikklærer, er å gå utenom den tryggheten arbeidsboka gir, *«det er litt sånn betryggende å bruke den* [arbeidsboka i matematikk]*»*. På grunn av dette sier hun at hun har brukt matematikkboka mer i undervisningen mer enn hun i utgangspunktet hadde planlagt.

4.3.2 Benjamin

I arbeidet med problemløsning bruker Benjamin å arbeide mye praktisk og med konkreter, samtidig som det matematiske språket er viktig *«jeg fokuserer på at vi snakker mye matte»*. Benjamin bruker også ofte å la de de elevene som forstår det godt, og som har tilegnet seg gode løsningsstrategier, forklare de elevene som ikke skjønner helt, hvordan de tenker, *«fordi å høre det fra en elev gjør jo at det de synes det er spennende sant»*. Elevene får derfor veldig ofte arbeide parvis eller i grupper, noe som også gjør det tryggere for dem, *«det blir tryggere å ha noen å snakke med hvis du ikke helt vet*».

I tillegg peker han på at problemløsningsoppgaver differensierer seg litt selv, *«du forventer jo litt mer av noen enn av andre»*. Forutsetningene elevene har for å løse oppgaven, er på denne måten med å sette en forventning for elevenes løsning. Samtidig kan de sterkeste elevene også finne flere løsningsmåter. For å gjøre dette påpeker han også at oppgavene må være åpne. Det å finne gode oppgaver er også noe som blir lettere etter noen års erfaring*, «det blir lettere etterhvert å stille mer åpne og rike oppgaver»*. Dette begrunner Benjamin videre med trygghet *«også frigjør man seg mer etterhvert fordi man blir tryggere på faget og rollen»*.

For å finne passende problemløsningsoppgaver ser Benjamin på hva målet i læreplanen er, og hvordan de kan arbeide ut ifra det gitte målet på en god måte, *«Hvordan vi kan bruke målet på en måte som gjør det forståelig for alle når vi er ferdig liksom?»*.

4.3.3 Cecilie

En viktig rolle for Cecilie som lærer i arbeid med problemløsning er å gi elevene nok tid når de arbeider, «*La dem få lov å bruke litt tid, og summe seg å tenke gjennom problemet»*. For at elevene ikke skal synes det er så skummelt å dele sine tanker og løsningsstrategier, pleier Cecilie videre å la dem diskutere oppgaven to og to, eller i grupper, før de individuelt får presentere sin tankegang i plenum, *«sånn at det de er trygg på det svaret de har»*. Når Cecilie har arbeidet med problemløsning sier hun at det har vært *«mest sånn praktiske oppgaver ute»*. I tillegg presiserer hun også at hun legger vekt på det matematiske språket, *«at de forstå begrepene vi snakker om»*. Hun sier videre at det er viktig å la elevene løse et mangfold av oppgaver innenfor et tema for å få en dypere og bedre forståelse av det.

Cecilie synes det kan være utfordrende å finne problemer som alle elevene kan klare å løse, og at hun helst skulle hatt en ekstra lærer, eller assistent som kunne bidratt for å hjelpe de som trenger veiledning, *«ja, for at det alle skal få det til»*.

4.3.4 Daniel

Daniel er klar på hva som skal til for å få elevene til å lære; *«Det aller viktigste det er at elevene trives. Det er det aller, aller viktigste! Uansett hva læreren underviser i. Hvis de trives, så lærer de»*. Grunnleggende for at elevene skal lære noe som helst på skolen er altså, ifølge Daniel, at de trives. For at elevene skal trives sier Daniel videre at det er viktig at undervisningen varieres, siden elevene foretrekker å arbeide på forskjellige måter og for å unngå at de kjeder seg; *«de har så mange læringsmåter, elevene. Altså alle har sin måte å lære det på. Og hvis jeg bruker mye variasjon så får jeg alle med»*.

Når Daniel skal starte med problemløsning med en klasse som ikke er vant til det, sier han at det først vil være viktig å arbeide med praktiske problemer, for så å finne en fornuftig strategi og løsningsmetode. Deretter kan elevene jobbe litt videre. Dersom elevene ikke er vant til å arbeide med matematisk problemløsning på skolen, må de i starten i tillegg til å faktisk løse oppgaven, tilegne seg kunnskap om hvordan man kan og bør arbeide for å løse slike oppgaver. Det blir derfor viktig for læreren å sørge for at selve problemløsningen ikke er for vanskelig slik at elevene blir umotiverte og mister troen på at de selv kan finne kreative og gode løsninger på egenhånd, uten å ha en gitt algoritme eller fremgangsmåte å følge, *«På nivå, eller kanskje litt under nivået»*. Daniel sier videre at et problem kan være en rik oppgave, og at, *«samme oppgave kan løses på forskjellige nivåer»*.

Daniel sier videre at arbeid gjennom problemløsning krever at læreren må tørre å gå ut av komfortsonen sin, og prøve nye ting. Han mener det er med på å bygge gode relasjoner til elevene dersom du viser at du også kan ta feil eller prøver nye ting og viser at du ikke alltid vet svaret, *«elevene liker det mye bedre».* Å få elevene til å like deg som lærer gjennom å la dem trives på skolen mener Daniel er smart, *«også kan vi hive papirfly en i gangen iblant, og så synes de jeg er en kul lærer og da er det mye lettere å motivere».* Han viser dermed til at det er viktig å ha det litt kjekt med elevene, og finne på litt morsomme aktiviteter.

Ved å variere undervisningen gjennom blant annet bruk av problemløsningsoppgaver hvor elevene får benytte egne strategier og fremgangsmåter som videre diskuteres i plenum, sier Daniel at han får alle elevene til å henge med i undervisningen. Dette fikk jeg også observere, da han blant annet ga elevene oppgaver som belyste temaet de jobbet med fra ulike innfallsvinkler. Av det jeg observerte var et typisk trekk ved undervisningen at han i tillegg var rask å skifte arbeidsform når elevene begynte å bli ukonsentrerte. Det var likevel gjennomgående i undervisningen at elevene fikk være problemløsere og at fokuset var på elevenes fremgangsmåter, hvor forståelse og utforskende tenking ble stående helt sentralt. I dette arbeidet, som ved alt annet, sier Daniel det er viktig at elevene er motiverte: *«de må jo være motivert! Hvis de ikke er motivert lærer de ingenting».*

Fra observasjonen noterte jeg meg at Daniel hele tiden ga elevene god tid til å tenke seg om etter at han stilte et spørsmål, noe som ga elevene en mulighet til å få tenkt seg om før de svarte. Dette var også Daniel fokusert på i intervjuet, *«derfor venter jeg alltid, og spør aldri den som først rekker opp hånden»*. Dersom noen likevel kommer med et raskt svar, forteller Daniel at han pleier å si: *«kanskje, er det flere forslag?»,* da kommer gjerne flere med forslag også kan de vurdere forslagene sammen og bli enige sammen, *«også trekker vi en konklusjon»*. I intervjuet sier Daniel også at *«samtale er utrolig viktig i matematikk»* og at det er viktig at elevene får nok tid til å tenke seg om for å skape gode og reflekterte samtaler gjennom problemløsningsprosessen. For å få med seg alle i problemløsningsoppgavene, bruker Daniel derfor å blant annet la de som har forstått forklare de som ikke har forstått, *«Jeg bruker ofte de flinke elevene til å forklare for de andre, og hjelpe dem».* Han begrunner dette med at begge parter da ofte forstår det bedre.

Daniel påpeker også at han arbeider ulikt med problemløsning ut ifra hvor de er kommet i innlæringsprosessen. Han sier også på at det er ulikt hvor lenge han kunne arbeide med et problem i gangen, og at det derfor er umulig å anslå noen fast tidsbruk på problemløsning. Grunnen til dette er at han må se an elevene og hvor lenge de holder interessen, han viser til undervisningen jeg observerte, og sier:

> *«Altså på et tidspunkt da det hadde gått en halv time, da var det nok. Da kunne du merke det på at da forsvant noen. Også snur vi, også tar vi quiz istedenfor».*

Det er altså viktig å variere undervisningen og se an elevene på hvor lenge en kan holde på med en problemløsningsoppgave. Man kan altså ikke sette en fastslått tidsbegrensning på forhånd, da det er avgjørende at elevene trives og holder motivasjonen oppe. Dette kan være en utfordring for læreren, om man ikke har nok erfaring.

4.3.5 Emilie

En viktig forutsetning for at man skal kunne drive med effektiv og god problemløsning sier Emilie er at det er en kultur for å lytte og lære av hverandre i klassen, *«så det er jo avhengig av at det er, liksom en kultur for at man skal lytte til hverandre og rekke opp hånden og sånn».* På denne måten får elevene muligheten til å lære av hverandre og få et innblikk i andres løsningsstrategier og forslag. Det er derfor en viktig rolle for læreren å skape en slik kultur i klassen.

I løpet av de 3 årene Emilie har undervist gjennom problemløsning har hun fått en bedre forståelse for hvordan elevene tenker, og hvor problemløsningsoppgavene hun gir kan føre elevene, «*lettere nå å se for seg hva slags problemer som kan oppstå og, blitt mye flinkere til å vite de, hva slags ideer de kommer til å ha også».* På denne måten kan Emilie i større grad enn tidligere velge ut egnede problem og forberede hvordan hun skal lede elevene til å oppdage den ønskede matematikken bak problemet. Før Emilie begynte å undervise gjennom problemløsning tenkte hun lite over at elevene nødvendigvis ikke tenkte på samme måte som henne, *«jeg har vel bare tenkt at det er den måten alle tenker på. Også viser det seg jo at nei, det er det jo ikke, det er jo hundrevis av måter de tenker på».* Å oppdage at vi tenker forskjellig har gitt Emilie en vekker på at det kan være berikende å la elevene presentere sine fremgangsmåter for klassen.

En problemløsningsoppgave må, ifølge Emilie, åpne for flere ulike løsningsstrategier og tilpasse seg elevenes ferdigheter, slik at alle elevene får utfolde seg. På denne måten blir er problemløsning for Emilie en naturlig arbeidsmåte for å gjøre elevene gode i matematikk, *«hvis målet er at elevene skal bli gode i matematikk så tror jeg problemløsning er veien å gå».* Emilie ser altså på problemløsning som en god og nødvendig arbeidsmåte for å tilegne seg matematisk forståelse og ferdigheter på. Emilie påpeker at den matematiske samtalen er svært viktig i problemløsning, *«man bør bruke mere tid på å snakke matte rett og slett».*

Det å måtte ta ting litt på sparket er noe også Emilie er opptatt av, og hun forteller blant annet at hun synes det er umulig å lage en plan for hva som skal skje de neste to ukene, fordi en aldri vet hvor lang tid ting tar. Dette begrunner hun med at hun underviser i det hun ser elevene trenger undervisning i, *«[...] man vet jo aldri hvor lang tid det tar, for man vet jo ikke hvilke problemer som oppstår».* Noe man tenker at skal ta 5 minutter kan på denne måten ende opp med å ta 2 timer. Emilie er derfor klar på at man må være fleksibel og arbeide dynamisk hvis man skal arbeide med matematisk problemløsning, og det nytter ikke hvis man må ha alt forutbestemt, *«Så for en person som er veldig opptatt av å må ha alt spikret og, så er det* [arbeid med matematisk problemløsning] *nok litt verre».*

4.3.6 DRØFTING: Lærerens rolle

Blant alle de faktorene som informantene påpeker som viktige ved lærerens rolle i problemløsning, er et fellestrekk for alle å ha fokus på det matematiske språket og/eller samtale i matematikk. Å legge vekt på matematiske begreper gjennom samtale i matematikk, er noe også Kilhamn (2011) viser til som viktig for å lære elevene et korrekt matematisk språk, som alle har en felles forståelse av. Å fremme gode samtaler i matematikk er også noe Anne påpeker som spesielt egnet i 1. klasse, fordi de er veldig nysgjerrige på det meste. Det å gi dem øvelse i å uttrykke tankene sine, er nettopp også en av hovedgrunnene til at hun ønsker å arbeide med matematikk gjennom problemløsning. Cecilie på sin side arbeider med det matematiske språket gjennom å sørge for at elevene forstår de begrepene som brukes. At elevene tilegner seg en god begrepsforståelse, er noe som ifølge Grevholm (2013) vil bidra til å forstå det abstrakte gjennom konkret forestilling. Likevel er det Benjamin, Daniel og Emilie som gjennom intervjuet fremstår som mest fokusert på bruk av det matematiske språket. Alle disse tre informantene er blant annet opptatt av at de elevene som behersker en metode eller strategi for det gitt problem, forklarer til de som synes det er vanskelig. Dette er noe de begrunner med at det gir økt forståelse for både elevene som får forklaringen av en jevngammel elev, men også for den som forklarer. Ifølge Grevholm (2013) er dette også en god øvelse for begrepsforståelsen, da elevene ved å bruke nødvendige begreper i sine forklaringer, trolig lar begge parter se nytten i disse begrepene (Grevholm, 2013). Det er i tillegg, ifølge Lampert (1990), viktig at læreren finner problemer for diskusjon som kan lede elevene frem til sentrale matematiske begreper og arbeidsmåter på en engasjerende måte.

Å finne gode problemer som passer alle og som alle elevene klarer, er noe Anne og Cecilie påpeker som en utfordring ved arbeid med matematisk problemløsning. Slik jeg ser det, kan dette ha en sammenheng med at deres undervisning fremdeles er mindre kommunikativ og mere oppgavestyrt enn de andre tre informantenes undervisning, da Ånestad (2011) viser til at kommunikativ undervisning minker behovet for nivådifferensiering. I tillegg krever det å finne gode problemløsningsoppgaver er også, ifølge Hiebert m.fl. (1997), at læreren har en klar oversikt over hva elevene skal lære gjennom problemet ved å ha målet klart for seg, samtidig som læreren må kjenne til hvordan elevene tenker (Hiebert, m.fl., 1997). Etter min forståelse krever dette med å finne gode problemløsningsoppgaver ut ifra dette, at læreren har tilstrekkelig erfaring på området og kjenner elevene sine godt. Dette er også noe de tre mer erfarne lærerne (med tanke på problemløsning) bekrefter, da alle på sin måte forklarer hvordan erfaring med problemløsning har gjort det lettere for dem å velge problemløsningsoppgaver og skjønne hvor de trolig fører elevene. Emilie beskriver forklarer dette på følgende måte; «*lettere nå å se for seg hva slags problemer som kan oppstå og, blitt mye flinkere til å vite de, hva slags ideer de kommer til å ha også»*. Likevel påpeker blant annet Daniel at det å presentere problemet på en måte som fører elevene dit han har tenkt, er utfordrende. Dette kommer jeg tilbake til i neste delkapittel.

Av informantene er det bare Benjamin som spesifikt sier han legger opp problemene ut ifra hva målene i læreplanen er, og hvordan de kan arbeide ut ifra det gitte målet på en god måte, *«Hvordan vi kan bruke målet på en måte som gjør det forståelig for alle når vi er ferdig liksom?»*. Dette er noe Hiebert m.fl. (1997) også trekker frem som måten man bør finne problemløsningsoppgaver, da de sier man må ta i betraktning hva det langsiktige målet er. Det er likevel også tydelig at også Daniel har et mål i sikte gjennom problemløsningsoppgavene, da han sier at han er avhengig av å vite hva som er målet med undervisningen. Dette vil jeg komme tilbake til i neste delkapittel.

Ifølge Emilie er det viktig at man har en god kultur for deling gjennom å lytte til hverandres løsningsstrategier og vurdere dem. Dersom læreren verdsetter nye løsningsstrategier og vurdering av disse, vil man kunne utvikle gode sosiomatematiske normer i klassen (Yackel og Cobb, 1996) som gjør matematikken mer virkelighetsnær og samtid gir elevene en bedre forståelse for matematikken, gjennom felles forventninger av deling og vurdering av ulike fremgangsmåter. Dette er også noe de andre informantene i ulik grad fremmer, ved å vise interesse for, samt fokusere på, elevenes fremgangsmåte fremfor svaret.

4.4 Introduksjon av problem

I dette delkapittelet vil jeg svare på hvordan lærerne introduserer og starter arbeidet med problemløsning.

4.4.1 Anne

Anne sier at det alltid er viktig at elevene har skjønt oppgavene de får, slik *«at de vet hva de skal gjøre»*. I tillegg sier hun at det er spesielt viktig at elevene får komme forholdsvis raskt i gang å arbeide når de er så små, og at man heller ikke bør gis for mye informasjon på en gang, *«man må bare hjelpe dem litt på vei»*. For at elevene skal kunne komme raskt i gang og forstå oppgaven er det videre viktig at oppgavene ikke blir for vanskelig, *«heller litt for lett»*.

4.4.2 Benjamin

Når Benjamin skal introdusere et problem har han en idémyldring, med fokus på at alle elevene blir hørt, *«her er problemet, hva gjør vi med det liksom?»*. I denne idémyldringen sier Benjamin videre at det er viktig å fokusere på at *«det er ikke gode og dårlig idéer, alle får bidra, så kan man heller forkaste ting etterhvert»*. Selv om Benjamin sier han ikke har noen fast fremgangsmåte, fordi dette avhenger av problemet, sier han likevel at han fokuserer på å starte med hva elevene kan fra før og deler idéer, *«har en liten idémyldring om hva de vet, hva de kan»*. I denne innledende idémyldringen fokuserer han på at elevene får komme med forslag til hvordan man kan tenke, uten å gi dem en gitt fremgangsmåte eller svar. Han fokuserer på å legge at det finnes flere løsningsstrategier, *«sånn hei, dette kan løses på mange måter, hvordan ville du tenkt?»*. Før de deler idéer i plenum får de ofte diskutere problemet litt sammen parvis eller i grupper for å gjøre det tryggere for dem. I tillegg sier Benjamin at oppgavene må være tilpasset til elevenes nivå.

4.4.3 Cecilie

Som introduksjon til problemløsning sier Cecilie at hun gjerne bruker et bilde fra arbeidsboka, som elevene kan diskutere ut ifra *«starter gjerne med samtalebildet og stiller dem en del spørsmål da»*. Gjennom disse diskusjonene får elevene tenke litt og får en bedre forståelse for temaet eller problemløsningsoppgaven de får, *«de får ulike innfallsvinkler da»*. Videre forklarer hun at elevene må forstå problemet før de kan begi seg ut på det på egenhånd*, «viktig å være tydelig. Å få oppklart hvis det er noe noen ikke forstår»*. Hun legger også til at de små er avhengig av at oppgavene ikke blir for vanskelige, og at de må ha visse rammer for å klare det, *«man må veilede dem og være veldig tett på og gjøre det enkelt»*.

Hun viser også til undervisningsopplegget jeg observerte og sier; *«jeg kunne jo bare be dem finne ut hvilke farger bilene hadde der ute, ikke sant? Men, ja, der er såpass mange som trenger litt forklaring først»*. Dette sier hun at kanskje kunne vært mer spennende for noen, men siden mangfoldet i klassen er stort og forutsetningene til elevene varierer kraftig, føler hun det derfor likevel nødvendig å fremdeles gi elevene rammer å jobbe ut ifra. Hun legger også til at de små er avhengig av at oppgavene ikke blir for vanskelige, og at de må ha visse rammer for å klare det, *«man må veilede dem og være veldig tett på, og gjøre det enkelt».*

4.4.4 Daniel

Når Daniel skal starte en time med problemløsning sier han at det aller viktigste er å sørge for at alle elevene forstår oppgaven og ønsker å løse den; *«det viktigste er at jeg har alle i klassen med. Altså at inngangsterskelen er så lav at, eller høy at jeg har alle med».* Å forklare oppgaven på en slik måte at alle elevene forstår hva de skal gjøre, og kommer i gang, er ifølge Daniel, både veldig viktig og veldig utfordrende, *«Det er utrolig vanskelig altså».* For å likevel klare dette, sier Daniel det er viktig med erfaring, og at man kjenner elevene sine godt, slik at en greier å treffe dem både med tanke på interesse og forutsetninger. På denne måten kan inngangsterskelen til oppgaven være tilpasset etter elevene, noe som er nødvendig for å få dem interesserte og med i problemløsningen. Videre sier Daniel at det er spesielt viktig at inngangsterskelen ikke er for høy i begynnelsen når elevene skal venne seg til arbeidsmetoden, *«Ikke bruk over nivå på begynnelsen. På nivå, eller kanskje litt under nivået også. Også følger du på».*

Når elevene skal arbeide med en problemløsningsoppgave må de, ifølge Daniel, stå frie til å være kreative og løse oppgaven slik det passer dem. En naturlig og sentral del av problemløsning blir da å finne ut hva en faktisk skal gjøre og hva oppgaven egentlig spør om. Daniel sier at man må forstå oppgaven godt, for så å bruke egne erfaringer, ferdigheter og kreativitet til å finne en løsningsmetode. Når elevene skal arbeide med en problemløsningsoppgave, minner Daniel dem på at målet er å finne en smart måte å gjøre det på, og at de står frie til å bruke den fremgangsmåten som passer for dem, «*Altså; finn en lur måte å gjøre det på. Tegn til eller regn til, eller forestill, eller hva som helst».* Ved at elevene griper oppgaven ut ifra egne evner og forutsetninger sier Daniel videre at gode matematiske problemer vil tilpasse seg elevene og på denne måten differensiere seg selv, *«Samme problemløsningsoppgave kan løses på forskjellige nivåer. Det er rike oppgaver altså, som flinke elever kan trekke mye mer ut av enn svake elever kan».* Elevene trekker altså, ifølge Daniel, så mye ut av oppgaven som de selv har evne til. Dette vil med andre ord bety at oppgavene må være lett å komme i gang med, eller som Daniel selv sier det, *«Med lav inngangsterskel».* Samtidig må elevene gjennom arbeid med problemløsningsoppgaver kunne strekke seg ut ifra egne forutsetninger og potensiale. På denne måten vil noen elever kunne se matematiske sammenhenger som andre elevene ikke ser, eller de kan jobbe videre på oppgaven ved å finne nye «problemer» i problemet.

Bortsett fra å sørge for at inngangsterskelen er lav nok for alle elevene, og sørge for at alle elevene forstår oppgaven og står fritt til valg av framgangsmåte, samt at de får tiden til å tenke seg om, har ikke Daniel noen fast framgangsmåte ved problemløsningsarbeid, *«for det kommer an på»*. Hvordan han legger frem oppgaven avhenger av problemet, men også av ytre rammer som tid på dagen, ukedagen eller om det er noe spesielt som har skjedd.

Ifølge Daniel er den største utfordringen med problemløsning å forklare problemet slik at de finner ut det han har tenkt, *«Det [mest utfordrende] er å forklare problemet på en sånn måte at vi kommer frem til dit jeg har lyst»*. Siden han tidligere har sagt at han ikke vil gi elevene verken svaret eller fremgangsmåte, sier han med dette at måten han legger problemet frem for elevene på, vil være med å bestemme hvordan de løser oppgaven og hvilken matematikk de får ut av det, «*jeg er nødt å vite hvor vi må hen»*. Lærerens jobb blir altså å lede elevene i riktig retning ved å forstå oppgaven på den måten han har tenkt.

4.4.5 Emilie

På mitt spørsmål om hva det viktigste ved å introdusere et problem for klassen er, svarte Emilie: *«Det er nok ofte å sørge for at de har forstått hva problemet er»*. For å kunne forsikre seg om at elevene forsto problemene, forklarer Emilie oppgaven godt gjennom diskusjon med klassen, før elevene selv starter å arbeide. Når elevene så arbeider går hun rundt for å se om de faktisk hadde forstått hva de skulle gjøre. Dette var noe jeg også fikk observere at Emilie gjorde, og da noen ikke hadde forstått helt, forklarte hun det på nytt i plenum. Forståelse er også det Emilie sier er viktigst ved undervisning i matematikk generelt, *«ja, kort oppsummert så er det at de skal forstå hva de driver med, ikke bare regne for å regne»*.

Det er, ifølge Emilie, avgjørende at elevene står fritt i valg av løsningsmetode og dermed også står fritt til å tenke kreativt og forstå oppgaven på deres egen måte. For å få til et slikt arbeid sier Emilie at det er viktig at elevene er motiverte for det. For å motivere elevene sier Emilie videre at det er viktig at alle elevene, på en eller annen måte, får til å løse noe av oppgaven, *«alle får til noe da. Selv om de kan få det til på en veldig tungvint måte, så at de får det, til rett og slett»*. Det å sørge for at alle elevene klarer å løse oppgaven på sin måte, blir på denne måten viktig for elevenes motivasjon, innsats og kreativitet.

Emilie forklarer at hun ikke har noen fast fremgangsmåte når de arbeider med problemløsning, men at elevene har hatt mye problemløsning og vet nå at de da står frie til å løse oppgaven som de vil, og at har ulike problemløsningsstrategier som å tegne eller bruke konkreter.

4.4.6 DRØFTING: Introduksjon av problem

Både Benjamin, Daniel og Emilie påpeker i intervjuene at de ikke har noen fast fremgangsmåte når det kommer til å innlede problemløsningsoppgaver. Til tross for dette presenterer de flere ting de mener er viktig å fokusere på i denne innledende fasen. Daniel og Emilie er her samstemte på at det viktigste ved introduksjonen er at *alle* elevene forstår problemet. For at elevene skal kunne være kreative og bruke sine forutsetninger til å finne en løsningsmetode, krever dette ifølge Daniel at oppgaven blir forstått godt, noe han sier er veldig vanskelig. I likhet med Daniel og Emilie, fokuserer også Anne og Cecilie på at elevene må forstå oppgaven og *«hva de skal gjøre»,* før de kan begynne arbeidet. Cecilie påpeker her at det er viktig å få oppklart hvis noen ikke forstår. Dette er altså i tråd med Polyas (1945) første fase av problemløsningsprosessen, «Å forstå problemet». Forståelse er også noe Lester og Lambdin (2006) peker på at lever i symbiose med problemløsning, som begge er primære mål innenfor matematikken.

Benjamin presenterer derimot en litt annen vektlegging, selv om forståelse nok også er et resultat av introduseringen hans, og dermed et fokus, hos han også. For å introdusere et problem har Benjamin nemlig en idémyldring sammen med elevene hvor han presenterer problemet og lar elevene komme med ideer ved å knytte dette til det de kan fra før. I denne idémyldringen er det viktig at alle blir hørt og at ingen svar blir sett på som rette og gale, da dette er noe de skal arbeide med og finne ut av gjennom problemløsningen. Benjamins måte å innlede et problem på, lener ut ifra dette mer på Mason, Burton og Stacys (2010) inngangsfase til problemløsning, da de sier denne skal gi elevene ideer til hvordan elevene kan løse oppgaven, gjennom å tolke den. Her er det selvsagt viktig at det ikke direkte skal gis løsningsmetoder, men heller ideer som lar elevene komme frem til løsningsmetoder selv. Dette er også noe Benjamin er klar på, da han sier at de i denne fasen skal komme frem til hvordan man kan tenke, men unngå svar og fremgangsmåter.

Slik jeg vurderer de to måtene å introdusere et problem på i småskolen, er det «*å forstå problemet*» mindre veiledende enn «*idémyldringen*» til Benjamin, da det kan være utfordrende å vite hvor vidt elevene faktisk har forstått oppgaven. Dette er også noe Daniel bekrefter, ved å si *«Det [få elevene til å forstå problemet] er utrolig utfordrende altså»*. Som nyutdannet lærer, tror jeg derfor at Mason, Burton og Staceys faseinndeling er lettere å bruke i praksis, da forståelsen for oppgaven heller kommer av et resultat av denne tilnærmingen. Gjennom å fokusere på de tre trinnene i inngangsfasen deres, *«Hva vet jeg?», «Hva vil jeg?»* og «*Hva kan jeg bruke?»* (Mason, Burton og Stacey, 2010), vil forståelse for oppgaven dermed også oppnås. Likevel er det viktig og presisere at også Polya (2004) viser til liknende type spørsmål for å gi elevene forståelse av oppgaven, og det vil derfor avhenge av smak og behag hvilken av de to tankegangene man synes er mest beskrivende.

Noe alle informantene er samstemte om, er å gjøre det klart for elevene at det finnes mange løsningsstrategier, og at elevenes oppgave er å løse problemet på deres egen måte. Det å la elevene få være kreative og komme med egne løsningsstrategier på denne måten, sier Grevholm (2013) nettopp er en del av det matematikk handler om. Daniel legger her i tillegg fokus på at de skal finne en løsningsmetode de synes er lur, som han selv sier *«Altså; finn en lur måte å gjøre det på. Tegn til eller regn til, eller forestill, eller hva som helst».* På denne måten minner han også elevene på strategier de kan benytte i arbeidet.

Daniel peker på at det først og fremst er viktig å få alle elevene med ved å bruke oppgaver med lav inngangsterskel; «*Ikke bruk over nivå på begynnelsen. På nivå, eller kanskje litt under nivået også. Også følger du på».* Daniel påpeker videre at problemene er rike oppgaver, og at de også åpner for å la elevene strekke seg, ut ifra egne forutsetninger og nivå. Dette tolker jeg som at dersom man tar utgangspunkt i rike oppgaver til problemløsningsarbeidet, som ifølge Wæge og Nosrati (2018) har lav inngangsterskel og stor takhøyde, kan man velge oppgaver som i utgangspunktet er litt under mange av elevenes nivå. Ved å bruke slike oppgaver åpnes et stort rom for elevene å strekke seg i, og elevene jobber dermed med oppgaven ut ifra sine forutsetninger og kunnskaper. På denne måten vil alle elevene få til noe og kan på denne måten vise hva de kan. Dette peker Wæge og Nosrati (2018) på som fordelen med å bruke rike oppgaver i undervisningen. Selv tror jeg også at dette er et viktig prinsipp for å gi elevene glede i å arbeide med matematikk, og samtidig trigge deres nysgjerrighet til å komme videre inn i problemet. Til tross for at ikke noen av de andre fire informantene direkte sier at oppgavene må ha lav inngangsterskel, tolker jeg det, som om de også mener dette ut ifra det de seir om problemløsningsoppgavene. Anne og Cecilie fokuserer på at problemene ikke må være for vanskelig, Benjamin sier problemløsningen må tilpasses elevens nivå, og Emilie forklarer det på denne måten; *«alle får til noe da. Selv om de kan få det til på en veldig tungvint måte [...]».* Polya (2009) påpeker også at problemløsningsoppgaver må ha en lav terskel, og begrunner dette med at alle elevene skal ha en mulighet til å starte å arbeide med den ut ifra egne forutsetninger. Gjennom dette sier altså alle informantene, med andre ord, at problemene må gjøre det mulig for alle elevene å finne en egen fremgangsmåte for å arbeide med dem.

Ifølge Daniel er tidsmangel ingen grunn til å ikke jobbe med matte gjennom matematisk problemløsning, men en grunn til at læreren må velge problemer med omhu og vite hvordan den bør presenteres gjennom å vite hvor de ønsker den å lede elevene. Dette er noe også Hiebert m.fl. (1997), som drøftet i forrige delkapittel, viser til som viktig, da de sier at det langsiktige målet må ligge til grunn for valg av problem. Å presentere problemene for elevene på en slik måte at de finner ut det han ønsker at de skal finne ut, er ifølge Daniel så den største utfordringen ved å undervise gjennom matematisk problemløsning.

4.5 Hjelp underveis

I dette delkapittelet vil jeg legge frem hvordan lærerne arbeider for å hjelpe elevene når de trender hjelp underveis i problemløsningen, og hva lærerne mener er viktig i dette arbeidet.

4.5.1 Anne

Anne sier at det ofte er vanskelig å motstå fristelsen til å gi elevene svarene, eller eventuelle løsningsmetoder, når de ber om det. Hun prøver likevel å unngå dette, og heller *«hjelpe dem på vei»*. Hvis de står helt fast prøver hun derfor å stille spørsmålet på nytt, å gi dem en annen innfallsvinkel ved å fokusere på hva de er bedt om å gjøre, hun sier også at hun ved undervisningen jeg observerte prøvde å veilede ved å si *«ja, er det en annen måte du kunne ha sortert på?»*. Hun påpeker videre på at det er viktig at de får trening på å tenke litt, *«la dem gruble litt selv da»*. For å motivere dem til å prøve videre er det da viktig at elevene blir gjort oppmerksom på at det ikke bare er ett svar som er riktig og hun er interessert i å bli kjent med deres løsningsmåte, *«si det til dem at jeg har lyst å vite hvordan du kom frem til svaret da. Eller hva du tenkte»*.

Det å styre elevene i riktig retning samtidig som de arbeider fritt, er noe Anne synes er en utfordrende del av problemløsningsarbeidet, *«når de er litt friere blir det lett litt uro. At de kan glemme litt hva de skal gjøre»*.

4.5.2 Benjamin

Når Benjamin skal hjelpe elevene fokuserer han på at elevene skal bruke et matematisk språk og forklare hvor de står fast. Fremfor å gi elevene løsningen, er det her viktig å heller hjelpe dem å finne strategier, dette er også noe hun sier at foreldrene må gjøre når de hjelper dem med leksene, *«jeg er veldig sånn streng til foreldrene at ikke gi dem løsningene, men prøv å gi dem strategier underveis»*. Benjamin er klar på at hvis det er noe en elev ikke skjønner, eller noe de synes er vanskelig, vil ikke det å gi dem svaret hjelpe, men gir man dem en god strategi kan dette derimot hjelpe dem å forstå, *«så føler de også at de mestrer det bra liksom».*

Benjamin påpeker at det er veien mot målet som er viktig, *«det å skjønne ting underveis»*. For at elevene skal ha muligheten til å både tenke og til å revurdere tankene sine, er det viktig at de får den tiden de trenger*, «man kan ikke si noe om tid på det liksom»*. Å bruke de elevene som har forstått til å forklare for de elevene som synes det er vanskelig, sier Benjamin er en god måte å hjelpe elevene på fordi det da ofte blir lettere for dem alle å forstå det bedre, *«så jeg tror de aller fleste tjener på det».*

Benjamin påpeker at det aller viktigste med problemløsning er å sørge for at elevene får en forståelse for hva de holder på med, *«at det ikke bare blir sånn instrumentelt liksom».* For å unngå at elevene får en instrumentell forståelse av matematikken sier Benjamin at «*de skjønner hvorfor ting er som det er»* og med dette forstå hvorfor de gjør det de gjør for å løse oppgaven. For å oppnå dette må elevene først forstå det ved bruk av det konkrete og kjente, før de senere kan få en mer abstrakt forståelse, slik at de ser at *«dette kan jeg bruke»,* også at de etterhvert som kunnskapen øker får bruke det de har lært videre.

Noe Benjamin har merket av arbeidet med problemløsning er at elevene at elevene klarer å bruke matematikken mer allsidig og overfør framgangsmåter og kunnskaper til å løse andre oppgaver, «*de blir litt sånn sjappe i hodet*». Dette tror han kommer av at de får arbeidet praktisk med matematikken og at det hele blir i en litt annen setting og gir elevene en dypere forståelse, *«du får lov å utfolde deg litt, du får snakket med andre og sett det fra andre vinkler og sånt».*

Benjamin synes det kan være utfordrende å få med seg de svakeste elevene i arbeidet. Dette er noe som også kan være problematisk i arbeid med problemløsning når de samarbeider med andre, *«de kan bli litt passive liksom, så at de blir passive i læringen».* En viktig jobb for Benjamin er derfor å passe på at alle er aktive i læringen og forstår hva de skal gjøre.

4.5.3 Cecilie

Når Cecilie skal hjelpe elevene i arbeid med problemløsning ønsker hun å lede dem frem uten å nødvendigvis gi dem et svar *«gi dem ideer, men samtidig ikke alltid si svaret».* Hun påpeker likevel at noen elever av og til må få et svar *«noen trenger kanskje å høre svaret da, for å være rolig og forstå».*

Cecilie viser her også til undervisningen jeg observerte hvor noen elever ble frustrerte når det kom nye biler til parkeringsplassen da elevene førte statistikk, mens andre synes dette var spennende. Hovedfokuset hennes er likevel å lede elevene til å finne en løsning, uten å si hva de skal gjøre, for å gjøre dette prøver hun å «*hjelpe dem på vei, gi dem tips, og prøve å få dem til å tenke riktig»*. For å få til dette er det, ifølge Cecilie, viktig at alle elevene synes at oppgaven er spennende og at de får bidratt med sitt, *«de må ikke miste eierforholdet til oppgaven»* legger hun til.

Cecilie sier at en utfordring med å hjelpe elevene under problemløsningsarbeid er at noen elever kan bli frustrerte og forvirret av å ikke ha en klar fremgangsmåte, noe som vil føre til at problemene ikke oppstår, *«de må bli vant til å støte på noen problemer også, og løse dem»*.

4.5.4 Daniel

For å hjelpe elevene ved problemløsningsoppgaver påker Daniel på at det er viktig å ikke gi elevene svaret eller fortelle dem hvordan de skal løse en oppgave, *«jeg forklarer aldri hva de skal gjøre»*. Videre forklarer han at dersom elevene trenger hjelp må de selv forklare hva de ikke forstår eller synes er vanskelig. Deretter fokuserer han på å stille spørsmål som ikke fastslår hva de skal gjøre, «*liksom prøve å stille de der «ledende» spørsmålene, «er det lurt å gjøre sånn? eller er det lurt å gjøre sånn? eller (...)»»*. Fremfor å gi elevene løsningen eller løsningsmetoder, ønsker altså Daniel å lede dem i riktig retning ut ifra hvordan eleven selv har tenkt. På denne måten får han fokuset vekk fra svaret og over på selve arbeidsprosessen.

Dette fikk jeg også opplevd under observasjonen, da han aldri sa «*ja- helt riktig!»* til det første som ble sagt, men lot heller andre komme med forslag ved å for eksempel si *«ja, kanskje. Er det noen andre forslag*?». Etter at han stilete et spørsmål sa han også ting som «*vi må tenke litt»* og *«tenke, tenke, tenke»*, for å vise til elevene at han ikke ønsket et raskt svar. Etter at flere elever hadde svart, eller kommet med forslag, ledet Daniel klassen mot en felles enighet om hva som var det mest fornuftige. Dette sier han også i intervjuet at han fokuserer på, *«at vi sammen finner en forståelse for det»*. På denne måten får elevene være dem som kommer frem til en fornuftig løsningsmåte. Dette peker også Daniel på når han sier at han aldri gir dem svarene, men forsøker å lede dem i riktig retning. For å gjøre dette er han blant annet opptatt av å finne fornuftige strategier og øve på å bruke disse.

Dersom elevene gjør noe feil, beholder Daniel fokuset på oppgaven, og påpeker eventuelt heller hva eleven har gjort og når det ville vært riktig å gjøre. Deretter sier han det er viktig å sørge for at oppgaven faktisk er forstått ved å minne om oppgaven. Et eksempel på Daniels rettelse av en elev som gjorde feil, fikk jeg også observert. Elevene skulle tegne et rektangel på 4 ganger 5 ruter og en elev tegnet langt flere ruter bortover i ruteboka si. Istedenfor å gripe inn å tegne rektangelet for eleven, eller si at dette er feil og hva han egentlig skulle gjøre, spurte Daniel *«Du, er det der riktig? Er det fire ruter der?»*. På denne måten ledet han eleven til å forstå oppgaven han tydelig hadde misforstått, for så å få han på rett spor igjen. Dette påpekte Daniel også i intervjuet da jeg spurte han om det:

> *«Det er mange lærere som går inn og tegner også tror man at de er på. Men da hadde eleven helt mistet fornemmelsen med det er 4 ganger 5. Hvis jeg har tegnet det for han så kunne det like gjerne vært 10 ganger 20. Ikke sant?».*

Her viser Daniel til at man ikke skal ta fra elevene kontrollen over oppgaven, men heller hjelpe dem å forstå hva oppgaven ber om og hvorfor det som er gjort er feil.

4.5.5 Emilie

Når Emilie går rundt for å hjelpe elevene er hun opptatt av å ikke røpe svaret for elevene. Istedenfor fokuserer hun på å forsøke å lede elevene inn på riktig vei ved ut ifra det elevene selv har kommet frem til, *«Jeg prøver jo å få tak i noe som er, altså riktig på vei da, også hinte. Spørre spørsmål for å få dem til å komme seg inn på riktig vei egentlig».* Emilie fokuserer altså på å bevare elevenes tankegang men å styre den med fokus på det som er riktig for å hjelpe dem videre, slik at de beholder forståelsen for oppgaven.

En annen ting som er viktig for Emilie er at elevene forstår hva de gjør og hvorfor de gjør akkurat dette når de løser en oppgave. I tillegg til å ikke ville røpe svaret for elevene, forsøker Emilie derfor og også unngå å si hva som er gjort feil dersom elevene får feil svar. Grunnen til dette er at elevene lærer mye av å finne feilene sine selv og på denne måten også lære seg å se over oppgavene sine. Når elevene har gjort en feil og kommer å spør Emilie om det er riktig, svarer hun derfor gjerne at de må se over oppgaven og hva de har gjort, helt til de ender på riktig svar: *«Så, jeg prøver å ikke si hva feilen er. Jeg sier at de må finne feilen selv og se over om det kan stemme».* På denne måten ønsker Emilie at elevene skal lære mest mulig av egne feil og utvide sin matematiske forståelse ved å skjønne hvorfor det de først gjorde var feil. Selv sier Emilie at en av de aller viktigste rollene til en lærer som underviser i matematisk problemløsning, nettopp er å la elevene finne veien selv: *«jeg prøver å lære minst mulig bort selv. Jeg prøver bare å hinte. Geleide dem i riktig retning og at de selv skal finne det* *ut da»*. Gjennom å kjenne elevene godt, vil det også være lettere å hjelpe dem der de trenger det *«Altså jo bedre du kjenner de, jo bedre vil det nok gå»*.

Det Emilie synes er mest utfordrende ved å undervise i problemløsning er når elevene ikke klarer å overføre kunnskapene de har til nye kontekster, *«at jeg noen ganger overvurderer hva de kan. Eller iallfall overføringsevnen deres»*. Emilie viser til at elevene kan ha lært seg en algoritme, eller memorere et svar til et oppgitt regnestykke, men når de skal ta det ut av konteksten de lærte det i byr dette på problemer da forståelsen er for svak, «*De klarer ikke å koble måtene på en måte»*. Dette ser Emilie likevel på som et midlertidig problem, da evnen til å overføre kunnskap utvikles i takt med problemløsningsegenskapene deres. Hun forteller derfor at elevene vil bli bedre til å ta kunnskapen ut av kontekst etterhvert som de får arbeidet litt mer med matematisk problemløsning: *«det vil jo gå seg til med mere av denne jobbingen da vet du. Det er jo veldig stor forskjell fra 1. gang man har det til den 10. gangen man har det»*. Emilie har erfaring med at elevene forholdsvis raskt forbedrer sin overføringsevne og forståelse ved å arbeide med matematisk problemløsning, selv om dette kan være en utfordring for både elevene og læreren i starten.

4.4.6 DRØFTING: Hjelp underveis

Når det kommer til å hjelpe elevene videre i problemløsningsarbeidet er alle de fem informantene enige om at en bør unngå å gi elevene svaret på problemet, men heller lede dem på riktig. Dette er også noe det er stor enighet om innen tidligere forskning (Schoenfeld, 1989; Niss og Jensen, 2002; Boesen, 2006), da det å la elevene finne en tilsynelatende ukjent vei selv, nettopp er en del av selve definisjonen av problemløsning hos flere forskere. Mason, Burton og Stacey (2010) uttrykker i tillegg at det å stå fast er den beste måten å lære på. Slik jeg ser det, må altså det at elevene står fast, må altså ikke sees på som et nederlag, men som en mulighet for læring. For at dette skal være mulig må man derimot vite hvordan man kan lede elevene videre i denne situasjonen.

Som jeg drøftet i delkapittel 4.2.6 er undervisning i matematisk problemløsning, så vel som løsning av matematiske problemer, en arbeidsmåte som blant annet krever øvelse og erfaring. Dette er noe jeg igjen ser tendenser av hos mine informanters arbeid med å hjelpe elevene der de står fast. Anne og Cecilie, som nylig har startet å bruke matematisk problemløsning i undervisningen sin, viser begge, til at det å veilede elevene gjennom oppgavene, uten å gi dem konkrete svar, kan være utfordrende fordi elevene gjerne ønsker svar. Likevel viser de begge til at de prøver, så langt det lar seg gjøre, å unngå å gi svarene til elevene, men heller gi dem nye innfallsvinkler og lede dem til å finne løsninger selv. Siden problemløsning også er nytt for 1. klassingene til Anne, forteller hun også at hun la vekt på å fortelle dem at hun er interessert i å høre hvordan de tenker. Cecilie prøver i sin veiledning å lede elevene på vei ved hjelp av tips. Hvorfor det kan være utfordrende å unngå å gi elevene svar, forklarer hun ved at *«noen trenger kanskje å høre svaret da, for å være rolig og forstå».* I tillegg viser hun til mangfoldet i klassen og undervisningen jeg observerte, hvor noen elever ble frustrerte av at det kom flere biler til parkeringsplassen underveis, mens andre synes dette var spennende. Ut ifra det Polya (2004) sier om å hjelpe elevene, hvor for lite hjelp kan oppfattes frustrerende og nedlatende for elevene, tolker jeg dette som at oppgaven ble for vanskelig for disse elevene når de ekstra bilene måtte tas hensyn til. For de elevene som synes dette gjorde oppgaven mer spennende, kan problemet i motsetning ha vært litt for lett i utgangspunktet for så å bli akkurat passe ved at ekstra biler måtte tas i betraktning. Å sørge for at elevene får akkurat tilstrekkelig med hjelp, er noe Polya (2004) peker på som utfordrende, og som i tillegg kan kreve både tid, øvelse og hengivelse fra læreren. Siden problemløsning er forholdsvis nytt å undervise i for både Anne og Cecilie, er det ut ifra dette ikke rart at det ble utfordrende å hjelpe elevene på en måte som gjorde at alle de greide oppgaven og samtidig fikk strekke seg ut ifra sine forutsetninger.

Benjamin, Daniel og Emilie, som alle er godt erfarne ved bruk av problemløsningsarbeid i undervisningen, løser den utfordringen som det å hjelpe elevene kan være, ved å rette oppmerksomheten mot matematikken og problemløsningen. Ved å gjøre dette fremfor å selv gi elevene svarene, vil man kunne oppnå det Boaler (2003) viser til som «dance of agency». Dette vil med andre ord si at man gir autoriteten til matematikken, slik at elevene tilslutt lærer seg å rette seg mot den for å kontrollere fremgangsmåte og svar (Boaler, 2003). Dette vil igjen være med på å gjøre elevene selvregulerte gjennom refleksjon og involvering i egen læring (De Corte m.fl., 2000).

Det å lære elevene strategier for å arbeide med problemløsning på, er noe alle både Benjamin, Daniel og Emilie er opptatt av. Benjamin forteller også at det å gi elevene strategier fremfor svar, er noe han også instruere foreldre til å gjøre når de hjelper elevene med lekser. Ved at Benjamin gir slike retningslinjer til foreldrene, vil dette også, slik jeg ser det, kunne bidra til å skape gode matematiske holdninger. Ifølge Polya (2009) er det å lære elevene ulike problemløsningsstrategier, som å tegne, prøve og feile, forenkle eller gjette og teste, viktig nettopp på grunn av at en naturlig del av problemløsning er å stå fast, og da trenger man måter å komme seg videre på. Dersom elevene står fast kan de dermed prøve å bruke en av de løsningsstrategiene de kjenner til. Dersom man lærer elevene ulike løsningsstrategier, vil man, slik jeg tolker det, på denne måten kunne vise til disse dersom elevene står fast, ved for eksempel å si: *«har du prøvd å tegne problemet?».* Min tolkning av dette er at man gjennom å lære elevene gode løsningsstrategier, kan øke sjansene for at elevene selv klarer å komme frem til en løsning ved matematiske problemer.

Forståelse er noe alle informantene i større eller mindre grad fokuserte på gjennom intervjuet. Benjamin går derimot videre inn på dette og sier at det er viktig at elevene ikke får en instrumentell forståelse gjennom å bare vite hvordan de løser en oppgave, men at de også må vite hvorfor de løser den på den måten de gjør. Ved å på denne måten tilegne seg relasjonell forståelse, vil man ifølge Wæge (2007) samtidig styrke elevene mestringsfølelse og glede av faget. Selv om det bare er Benjamin som eksplisitt kommer inn på dette under intervjuet, er det likevel klart, etter min tolkning, at en relasjonell forståelse er det de andre informantene også er ute etter å fremme, da samtlige fokuserer på at elevene må vite, og begrunne, hvorfor de går frem for å løse oppgavene som de gjør.

Flere av informantene peker også på viktigheten av å bruke det matematiske språket underveid i arbeidsprosessen. Dette er en viktig del av livslang læring innenfor matematikk, men jeg vil komme tilbake til dette i neste delkapittel, og jeg vil derfor ikke drøfte dette noe videre her.

4.6 Avslutning av problem

I dette kapittelet vil jeg svare på hvordan lærerne avslutter problemløsningsoppgavene og hva de mener er viktig i dette arbeidet.

4.6.1 Anne

For å avslutte en problemløsningsoppgave sier Anne det er viktig å oppsummere arbeidet og si hva de har kommet frem til. Når elevene presenterer svarene sine, fokuserer Anne på å at de også må forklare hvordan de kom frem til det, *«å på slutten å kunne begrunne svaret da»*. Hun tror også det kan være lurt å fortsette på det de arbeidet med i en senere time for å komme videre i temaet og skape en sammenkobling, til det de allerede har funnet, *«Jeg tenker at det er lurt å på en måte plukke opp igjen tråden senere da»*.

4.6.2 Benjamin

For å avslutte problemløsningsarbeid pleier Benjamin å snakke med elevene om hva de i utgangspunktet trodde og hvordan det viste seg å bli og hvorfor, *«å høre hva de fant ut underveis»*. Ifølge Benjamin er det viktig at man følger opp problemet ved å *«samle opp litt tråder»* tilslutt, og at de får reflektere over det de har funnet. Fra timen jeg observerte, påpeker han hvordan den ene gruppa kom frem til at de skulle hatt en felles ting å måle med, ikke vare egne musesteg som ga *«urettferdige og forskjellige svar»*. På denne måten fikk de selv oppdage nødvendigheten rundt standard måleenheter og gjennom avslutningen, reflektere over disse og hvorfor de tror det ble slike faste måleenheter ble funnet opp. Han kommer også til å fortsette på dette arbeidet en senere time.

4.6.3 Cecilie

For å avslutte en problemløsningsoppgave pleier Cecilie å ha en oppsummering av hva de har funnet. På denne måten kan elevene finne ut at noen oppgaver har forskjellige løsninger avhengig av hva man velger å fokusere på, *«at det kanskje [...] ikke bare er ett svar alltid*».

I dette arbeidet er Cecilie opptatt av å la elevene få presentere sine forslag og argumenter for seg, *«de skal hele tiden få forklare da, hvorfor* [de tenkte som de gjorde]». I denne avsluttende delen bruker hun også å la elevene diskutere om noe kunne vært gjort annerledes for å lettere løse oppgaven.

4.6.4 Daniel

Daniel avsluttet problemet ved å i fellesskap med klassen oppsummere og komme frem til hva de hadde gjort til å begynne med og hva de til slutt kom frem til at var en lurere måte å løse det på. Ved å presentere løsningen fra elevenes forskjellige innfallsvinkler vil dette også være med på å øke forståelsen elevene har til oppgaven og hjelpe dem med å utvikle egne strategier. Dette var likevel ingen klar avslutning på temaet, og i intervjuet pekte Daniel på at han kom til å fortsette arbeidet en annen time, *«altså vi jobber over tid med det».*

4.6.5 Emilie

Når en problemløsningsoppgave skal avsluttes bruker gjerne Emilie å ta en felles oppsummering og samtale rundt det de har gjort og funnet og hvilke forskjellige måter de greide å komme frem til svaret med. På denne måten får elevene delt sine strategier med de andre elevene, noe som gir elevene gode muligheter til å lære fra hverandre. Emilie tror at elevene blir motiverte av å få dele sine fremgangsmåter, *«også kan de lære av hverandre. Og at de lærer bort tror jeg gir veldig mye motivasjon».* Ved å dele fremgangsmåter og strategier ønsker Emilie også å styrke elevenes motivasjon ved at de får muligheten til å lære bort sin måte å tenke på til sine medelever. Emilie sier at elevene ofte kan lære bedre av hverandre og at de som lærer bort får mye motivasjon av dette fordi det kan gi dem glede av å få en så sterk bekreftelse på at deres måte å gjøre det på er god, og at den hjelper andre. Da jeg spurte Emilie om hva hun tenker er viktig når hun skal avslutte et problem svarte hun: *«nei det er jo at man har fått vist frem at det er mange måter å komme frem til svaret på da».* Hun la også til at elevene også lærer mye av å ha fått feil svar.

For Emilie er ikke svaret det viktigste med avslutningen og oppsummeringen *«jeg er egentlig ikke så opptatt av svaret i seg selv. Mere hvordan man kom til svaret, og hvorfor».* Dette sier hun er fordi det er i fremgangsmåtene læringen ligger. Ved at elevene deler sine fremgangsmåter og tankegang med klassen fører også dette til at elevene lærer av hverandre og etterhvert også finner ut at noens metoder er mer effektive enn dere egen og tar dermed i bruk medelevens metoder, *«De lærer av hverandre og prøver etterhvert da å bli mere effektive, finne den måten som passer best til ulike problemer».*

Dersom elevene kommer frem til at svaret de har funnet er feil, er dette også veldig bra fordi elevene da må gå grundig gjennom hva de har gjort å finne ut hva som er feil. Emilie sier derfor aldri til elevene hvor feilen ligger, «*da må de gå tilbake i oppgaven å se selv hvor de finner feilen, og hvorfor de fått feil».*

I tillegg synes Emilie det er viktig å kunne ha oppfølgingstimer for å sammenlikne og se etter likheter og forskjeller mellom løsningsmetoder som oppstår, «*det er ofte, hensiktsmessig og ha et par timer til».*

4.6.6 DRØFTING: Avslutning av problem

Alle de fem informantene mine forteller at de bruker en oppsummerende samtale for å avslutte arbeid med et problem. I denne oppsummeringen sier de at elevene får presentere sine løsninger, og at de da fokuserer på begrunnelse av svar og hvordan, samt hvorfor de kom frem til dette svaret. Slik kommunikasjon av kunnskap er ifølge Grevholm (2013) helt sentralt for varig læring. Slik jeg ser det, vil det å presentere sin fremgangsmåte og løsningsstrategi med andre, automatisk gjøre at du selv må tenke over og forstå hva du har gjort, hvorfor og hvor det førte deg. Ifølge Yackel og Cobb (1996), vil det å forklare tankegangen sin kunne øke elevenes matematiske forståelse fordi det tvinger dem til å konkretisere abstrakte tanker. Ifølge Mason, Burton og Stacey (2010), vil det å presentere løsningsstrategien for andre, også føre med seg at løsningen blir kontrollert. Å sjekke svaret sitt er igjen ett av tre ledd man bør arbeide med i vurderingsfase[13] av problemløsning (Mason m.fl., 2010). Et annet ledd i vurderingsfasen til Mason m.fl. (2010), er å reflektere rundt nøkkelbegreper. Dette er noe informantene fremmer gjennom å ha fokus på hva elevene har funnet gjennom problemløsningen.

Når det kommer til hva som er viktig når man skal avslutte en oppgave er alle informantene altså enige om at de da må ha en samtale om hva de har funnet ut gjennom problemløsningen. Slik det fremstår for meg i intervjuene, er det likevel først og fremst Daniel og Emilie som fokuserer mest på å legge frem løsningsmetoder for elevene i denne avsluttende delen. Det interessante her er videre at de derimot har ulikt fokus i dette arbeidet. Daniel fokuserer tilsynelatende mest på finne «*den lureste*» løsningsmetoden elevene kom frem til gjennom problemløsningsarbeidet, mens Emilie på sin side fokuserer på å vise *mange* løsningsmetoder. Hva sier så teorien om dette? Ifølge Grevholm (2013) er det betydningsfullt at læreren, og/eller elevene, legger frem forskjellige fremgangsmåter og metoder for å finne svaret. Samtidig sier Grevholm (2013) videre at man etter å ha løst problemet bør stille seg spørsmål som: *«Kunne jeg gjort det på en enklere måte?»* (Grevholm, 2013, s. 226). Hiebert m.fl. (1997, s.38) viser til at de forskjellige løsningsmetodene bør undersøkes og diskuteres, med mål om at alle deltakerne leter for bedre metoder. Min oppfatning er ut i ra dette at formålet er å først få presentert et mangfold av løsningsmetoder, for så å selv finne den strategien og fremgangsmåten som passer best for en selv og bygge videre på denne. Ser vi så på hvordan de to informantene arbeidet, vil jeg si at begge likevel følger dette tankemønsteret, men at Emilie i større grad bevarer en åpenhet rundt metodene hvor elevene selv avgjør hva som virker som den beste metoden, mens Daniel i større grad styrer og belyser dette valget. Jeg må her påpeke at Daniel også fokuserer på elevenes løsningsstrategier, og lar dem selv komme frem til «den lure» måten, gjennom å underveis i problemløsningen trekke frem metoder elevene kommer med. På den ene siden ser jeg ut ifra dette med fordel på Emilies fokus, som gir støtte til forskjellige tenkemåter og elevens mange

[13] Egen, fri oversettelse av Mason, Burton og Stacys (2010) problemløsningsfase *Review*

favoriseringer. På den andre siden ser jeg også med fordel på Daniels fokus, som kan bidra til elevenes utvelgelse av metode gjennom diskusjon. Det må også legges til grunn her at både min forståelse og informantenes svar kan ha blitt påvirket av den undervisningen de foretok før intervjuet, hvor Daniel arbeidet mot å la elevene «oppdage» multiplikasjon, mens Emilie hadde åpnere oppgaver som ga rom for flere løsningsmetoder.

At svaret elevene ender med er feil, er noe både Benjamin, Daniel og Emilie sier er mye læring i. Både Daniel og Emilie vektlegger her at elevene selv må gå grundig gjennom fremgangsmåten sin og selv finne ut hvor feilen ligger. Det å gjøre feil og rette seg selv på denne måten er noe også Wæge og Nosrati (2018) sier er en naturlig del av læringsprosessen.

Noe flere av informantene påpeker er at det her blir viktig å jobbe for at elevene også får en oppfatning av dette.

KAPITTEL 5: Resultat

I dette forskningsarbeidet har jeg, gjennom å holde fokus på forskningsspørsmålene mine, analysert og drøftet viktige tema angående arbeid med problemløsning på småskolen. I dette kapittelet vil jeg nå, gjennom hovedfunnene i drøfting og teori, gi et sammenfattet svar på problemstillingen min, som er følgende:

«Hvordan kan man som lærer undervise ved bruk av matematisk problemløsning på småskolen?».

Det første man må gjøre for å kunne arbeide med matematisk problemløsning, er å finne en passende oppgave, ut ifra et klart mål i læreplanen, som samtidig bygger videre på det elevene allerede kan. På denne måten må man altså vite hva man ønsker at elevene skal lære av oppgaven og hvordan man skal bygge videre på dette for å tilslutt nå læreplanmålet. I tillegg til dette må problemet ha rom for flere løsningsmåter og være virkelighetsnært for elevene. Det er også viktig at problemet er godt forståelig for *alle* elevene når det introduseres, samtidig som det må ha en så lav inngangsterskel at *alle* elevene, på én eller annen måte, vil få til å løse den. Arbeid med problemløsningsoppgaver krever derimot pågangsmot, og det er derfor avgjørende at oppgaven vekker elevenes nysgjerrighet og interesse, slik at de får lyst til å finne en løsning. For at oppgaven skal være tilpasset alle elevene må den også ha stor takhøyde slik at elevene kan strekke seg ut ifra sine egne evner.

Når man har funnet en passende problemløsning for elevene, er det viktig å sørge for at alle elevene forstår hva oppgaven spør om og begir seg ut på den slik at de er aktive i læringen. På småskolen er det også spesielt viktig å starte fra det konkrete og kjente. Som lærer må man forklare, samt legge til rette for, at elevene står fritt til å løse oppgaven på hvilken som helst måte. For å få elevene til å forstå dette bør læreren derfor må vise stor interesse for å høre elevenes løsningsmetoder. Læreren må derfor fokusere på fremgangsmåten fremfor å fokusere på svarene elevene ender opp med. Det å anerkjenne nye måter å tenke på kan også indirekte oppfordre barna til å finne «nye» og egne løsningsmåter. For at elevene skal ha størst mulighet for dette, bør læreren også sørge for at elevene har tilgjengelig konkreter og andre hjelpemidler som de kan bruke dersom de ønsker det. Før elevene starter med problemløsningen på egenhånd, fant jeg at man bør ha en idémyldring med elevene hvor man fokuserer på det de kan om temaet fra før. I denne idémyldringen kan man minne elevene på strategier, som «prøv og feil», tegn, bruk konkreter, osv., men man må ikke røpe noen mulig fremgangsmåte til problemet.

Siden en svært viktig del av problemløsningsarbeidet er å dele fremgangsmåter med hverandre og vurdere disse, blir det videre viktig å fokusere på den matematiske samtalen. Gjennom denne samtalen bør man la elevene lene seg på matematikken og hva problemet spør om for å komme videre i arbeidet og sjekke resultatene sine. For at elevene skal ha muligheten til dette er det viktig at læreren modellerer for elevene hvordan man går frem når man løser problemer. Dette kan man blant annet gjøre ved å stille seg spørsmål som «Hva vet jeg?», «Hvor vil jeg?» og «Hva kan jeg bruke?», både i plenum for klassen, men også når man skal hjelpe elevene videre i et selvstendig problem. Når man ikke har mye erfaring med problemløsning, kan det være frustrerende for både elevene og læreren å ikke kunne gi svarene. Dette er likevel noe som raskt kan forbedre seg om man angriper det på riktig måte. En god ting å huske på i slike situasjoner, som man også bør dele med elevene, er at det er gjennom å stå fast man lærer; vet man hva man skal gjøre med én gang, kan man det jo tross alt allerede.

Som lærer i arbeid med problemløsning må man kunne ta elevenes perspektiv og prøve å forstå hva og hvordan de tenker, for å på denne måten kunne hjelpe dem å videreutvikle seg. På småskolen blir det også spesielt viktig at man kan hjelpe elevene å sette ord på tankene sine og kaste lys på matematikken i disse tankene. På grunn av at det kan være vanskelig for de små å holde konsentrasjonen oppe over lengre tid, kan det være en fordel at problemene ikke blir for omfattende og store, og at man som lærer er flink til å se an elevene med tanke på utholdenhet, interesse og engasjement. Man må også kunne være fleksibel og variere undervisningen om det trengs, for å holde fokuset oppe. Videre kan det også være lurt å la elevene arbeide parvis med problemer, og da spesielt i starten, fordi de på denne måten har noen å diskutere med og slipper å stå alene i arbeidet. Når problemet er løst og økten skal avsluttes, må læreren sørge for at de ulike løsningsmåter av problemet blir lagt fram og drøftet på en slik måte at elevene kan ta med seg nye strategier videre til en annen problemløsning. Spesielt når problemløsning er nytt for elevene, og når barna er så små at det er vanskelig for dem å presentere tankene sine på en måte som også er forståelig for resten av klassen, er det viktig at læreren hjelper til med formidlingen, gjennom å demonstrere og forklare. Ved å gjøre dette modellerer man samtidig for elevene hvordan de selv kan presentere tankene sine. Denne vurderingsfasen av problemet krever imidlertid god tid. Man må derimot være påpasselig på at det er elevens tankegang man presenterer, og at man ikke utvikler den slik at elevene ikke forstår.

Slik jeg ser det er lærerens rolle ved problemløsning på småskolen i stor grad om å legge til rette for at elevene selv får oppdage matematikk, og på denne måten opparbeide seg en relasjonell forståelse av det de lærer. Det handler også om å lære elevene å tenke som en problemløser og hva de skal gjøre når de står fast. Det grunnleggende vil være at man gir elevene tid og mulighet til å komme frem til løsningsmetoder som de deler med andre, og på denne måten både kan reflektere over egne metoder, lære nye måter av hverandre og videreutvikle egne metoder ut ifra dette. Det er ikke en selvfølge at man forstår hvor mange fremgangsmåter som faktisk finnes for å finne en løsning. Som Emilie så fint sa: *«jeg har vel bare tenkt at det er den måten alle tenker på. Også viser det seg jo at nei, det er det jo ikke, det er jo hundrevis av måter de tenker på».*

KAPITTEL 6: Avslutning

I dette forskningsarbeidet har jeg funnet at det er altså ikke finnes noen enkel oppskrift på hvordan man som lærer kan arbeide med matematisk problemløsning på småskolen. Dette er noe som krever pågangsmot, vilje, refleksjon og at man som lærer ikke er redd for å gå utenom komfortsonene. Dette er noe man, dersom innsats legges til grunn, vil lære gjennom å tørre å «prøve og feile» og på denne måte tilegne seg erfaring videre. Det er min oppfatning at det å kunne undervise ved hjelp av problemløsning først og fremst er en utviklingsprosess for læreren og at læreren er avhengig av erfaring og utprøvning for å kunne bli en god underviser i dette.

Selv om jeg ikke kom frem til noen konkret oppskrift på hvordan man kan arbeide med problemløsningsoppgaver på småskolen, fant jeg likevel ut at dette er noe man absolutt kan, og bør arbeide med fra 1. klasse.

Litteraturliste:

Alseth, B., Breiteig, T., & Brekke, G. (2003). *Evaluering av reform 97: Endring og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering - matematikkfaget som kasus.* Notodden: Telemarksforskning-Notodden.

Aase, T. H., & Fossåskaret, E. (2014). *Skapte virkeligheter: Om produksjon og tolkning av kvalitative data* (2. utgave. utg.). Oslo: Universitetsforlaget.

Ånestad, G. (2011). Hvorfor endre klassromspraksisen? *Tangenten*, ss. 15-19.

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap.* Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. I B. Grevholm, *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv* (ss. 115-132). Sweden: Studentlitteratur.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice - the case of the "dance of avency". https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500873.pdf, Standford University.

Boaler, J. (2009). *The Elephant in the Classroom: Helping Children Learn and Love Maths.* UK: MPG Books Group.

Breiteig, T. (2008). Problemløsning som inngangsport til matematikk. *Tangenten*

De Corte, E., Verschaffel, L., & Op´t Eynde, P. (2000). Self-Regulation: A Characteristic and a Goal of Mathematics Education. I M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Red.). San Diego, CA, US: Academic Press.

Drugli, M. B. (2015). *Relasjonen lærer og elev: Avgjørende for elevenes læring og trivsel.* Oslo: Capplen Damm AS.

Fangen, K. (2010). *Deltakende observasjon.* Bergen: Fagbokforlaget.

Grevholm, B. (2013). *Matematikkdidaktikk 1-7.* Cappelen Damm AS.

Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Human, P., . . . Olivier, A. (1997). *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding.* Portsmouth, N.H: Heinemann.

Hjardemaal, F., & Tveit, K. (2011). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode: En hjelp til kritisk tolking og vurdering* (2. utgave. utg.). (T. A. Kleven, Red.) Bergen: Fagbokforlaget.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers.* Doktoravhandling. Göteborgs universitet: Utbildningsvetenskapliga fakulteten.

Kongelf, T. R. (2011). What characterises the heuristic approaches in mathematics textbooks used in lower secondary schools in Norway? *Nordic Studies in Mathematics Education, 16 (4)*, ss. 5-44.

Kunnskapsdepartamentet. (2013, August 1). *Formål.* Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04): https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Formaal

Kunnskapsdepartamentet. (2013, August 1). *Generelle ferdigheter.* Hentet fra Læreplan i matematikk fellesfag (MAT1-04): https://www.udir.no/kl06/MAT1-04/Hele/Grunnleggende_ferdigheter

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utgave. utg.). Oslo: Gyldendal Akademisk.

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. I *American Educational Research Journal, Vol. 27, No. 1.* (ss. 29-63). American Educational Research Association.

Lester, F. K. (1985). Methodological Considerations in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. I E. A. Silver, *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (ss. 41-70). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lester, F. K., & Lambdin, D. V. (2006). Undervisa genom problemlösning. I J. Boesen, G. Emanuelsson, A. Wallby, & K. Wallby, *Lära och undervisa matematik - Internationella perspektiv* (ss. 95-108). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Lester, Jr. F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. I R. Lesh, & M. Landau, *Acquisition of Mathematics Consepts and Preocesses* (ss. 229-259). New York: Academic press.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically. Second edition.* Great Britain: Pearson Education.

Maxwell, J. A. (1992). *Understanding and Validity in Qualitative Research.* Harvard Educational Review.

Niss, M., & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark. Uddannelsestyrelsens temahæfte nr. 18 - 2002.* København: Undervisningsministeret.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* United States of America: John Wiley & Sons, Inc.

Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematial method.* Princeton: Princeton university press.

Regjeringen. (2018, 06 26). *Fornyer innholdet i skolen: Pressemelding Nr: 132-18.* Hentet fra Regjeringen.no: https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/fornyer-innholdet-i-skolen/id2606028/

Ringdal, K. (2013). *Enhet og mangfold: Samfunnsvitenskapelig forskning og kvantitativ metode* (3. utgave. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Schoenfeld, A. H. (1989). *Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving.* Hentet fra file:///Users/Vilde/Downloads/ASCDpaperscanAHS.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. I D. Grouws, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 334-370). New York: MacMillan.

Thagaard, T. (2013). *Systematikk og innlevelse: En innføring i kvalitativ metode.* Bergen: Fagbokforlaget.

Thornquist, E. (2003). *Vitenskapsfilosofi og vitenskapsteori.* Bergen: Fagbokforlaget.

Wæge, K. (2007). *Elevenes motivasjon for å lære matematikk og undersøkende matematikkundervisning.* Trondheim: NTNU-trykk.

Wæge, K., & Nosrati, M. (2018). *Motivasjon i matematikk.* Oslo: Universitetsforlaget.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. I *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 4* (ss. 458-477).