Masteroppgåve

«Då skal eg skrive svaret»

Ein kvalitativ studie av elevar på 5.trinn og 8.trinn si forståing av likskapsteiknet.

Maria Hauge Blindheim

Master i undervisning og læring - matematikk

2020

Tal ord: 29999

HØGSKULEN I VOLDA

Abstract

This master thesis examines how students in primary school and lower secondary school understand the equal sign. The equal sign is visible in all levels of mathematics and it is a symbol that students use from the moment they begin their education. In my own teaching I have observed misconceptions and misuse of the equal sign within the classroom and I have wondered what the cause of this could be. Therefore, I formulated a research question that reads as follows: *How do some students in primary school and lower secondary school understand the equal sign?*

The goal of this thesis is to achieve an understanding of how students *can* understand and use the equal sign and find out which factors can influence their understanding. Former research has been done in the field of students understanding of the equal sign (e.g. Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; McNeil et al. 2006) and it is put forward that the equal sign often is interpreted by students as an operational symbol that tells the student to equate or find the answer. The equivalence interpretation, which tells us the expressions on both sides of the equal sign has the same value, can take longer time for students to possess. But it shows that with teaching that facilitates an equivalence interpretation, students can develop this.

This is a qualitative study where I have used data previously collected by three researchers at Volda University College. The data analyzed in this study is transcriptions of voice recordings from seven task-based interviews with students in the fifth and eight grade. The interviews were analyzed using two frameworks which deal with mathematical understanding and students understanding of the equal sign. With limited data it is not possible to say something about how all students understands the equal sign, but the findings may apply to and have value for others.

The findings show that the students in fifth grade generally have an operational understanding of the equal sign, and an instrumental understanding which can limit further learning. Even so, they show signs to be able to expand their understanding through guidance and discussion. It looks like the eight grade students to a greater extent can understand the equivalence interpretation of the equal sign. Those who show this interpretation also seem to see more connections and can be on their way to develop a relational understanding as well. One could infer that the students' understanding is connected to their mathematical competence, alongside the experiences they have had and how they previously have been exposed to the equal sign in their education.

Samandrag

Denne studien omhandlar elevar på mellomtrinnet og ungdomstrinnet si forståing av likskapsteiknet. Likskapsteiknet er synleg på alle matematiske nivå og er eit symbol som elevar nyttar seg av frå dei startar på skulen. I eigen undervisningskvardag har eg observert misoppfatningar og misbruk av likskapsteiknet hos elevane, og eg har lurt på kvifor det er slik. Derfor enda eg opp med eit forskingsspørsmål for å belyse dette: *Korleis forstår nokre elevar på mellomtrinnet og ungdomstrinnet likskapsteiknet?*

Føremålet med oppgåva er å få ei forståing av korleis elevar *kan* forstå og nytte likskapsteiknet, og finne ut kva som kan påverke forståinga deira. Det er tidlegare gjort ein del forsking på elevar si forståing av likskapsteiknet (m.a. Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; McNeil et al., 2006) og det kjem fram at likskapsteiknet ofte vert tolka som eit operasjonelt symbol, som fortel at ein skal rekne ut eller finne svaret, av elevar. Ekvivalenstolkinga av likskapsteiknet, som viser til at uttrykka på begge sider av likskapsteiknet har same verdi, kan ta lenger tid å få på plass. Det viser seg likevel at med undervisning som legg til rette for det kan elevar utvikle ei slik forståing.

Forskingsdesignet i oppgåva er kvalitativt og eg nytta meg av materiale som tidlegare var samla inn av tre forskarar ved Høgskulen i Volda. Materialet som er analysert i studien er transkripsjonar av lydopptak av sju oppgåvebaserte intervju med elevar i femte og åttande klasse. Intervjua vart analysert ut frå to rammeverk som omhandlar matematisk forståing og elevar si forståinga av likskapsteiknet. Med eit lite utval vil ein ikkje kunne sei noko om korleis alle elevar forstår likskapsteiknet, men funna som kjem fram i studien kan gjelde fleire og det kan ha nytteverdi for andre.

Funna som er gjort i studien viser at elevane i femte klasse i stor grad forstår likskapsteiknet som ein operator, og at dei har ei instrumentell forståing som kan vere avgrensande for vidare læring. Dei viser likevel teikn til at dei kan utvide forståinga si gjennom rettleiing og diskusjon. Elevane i åttande klasse ser i større grad ut til å forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn, sjølv om det truleg ikkje vil gjelde for alle. Dei som viser ei ekvivalenstolking viser også teikn til at dei ser fleire samanhengar og kan vere på veg mot relasjonell forståing. Ut frå funna kan det sjå ut til at elevane si forståing heng saman med deira matematiske kompetanse, kva erfaringar dei har med seg frå tidlegare og korleis dei er eksponert for likskapsteiknet i undervisning.

Forord

Denne masteroppgåva set sluttstreken for studietida mi ved Høgskulen i Volda. Det har vore ein spanande og lærerik prosess, men også krevjande. Det har tatt litt lenger tid enn eg først hadde rekna med då eit nytt familiemedlem såg dagens lys i november i fjor. Eit drygt år seinare er eg endeleg i mål med ei oppgåve som har gitt meg kunnskap som eg kan ta med meg vidare i læraryrket.

Eg vil rette ein stor takk til rettleiaren min Arne Kåre Topphol som har losa meg gjennom arbeidet på ein god måte. Dine konstruktive tilbakemeldingar og gode innspel har vore til stor hjelp. Takk til Eirin og Liv for gjennomgang og korrekturlesing.

Ein stor takk til avdelingsleiar Heidi som har lagt til rette det siste halve året på jobb slik at eg skulle greie å fullføre, og ein takk til elevane mine som har vore tolmodige den siste tida før innleveringsfristen.

Til slutt vil eg takke sambuaren min og foreldra mine. Utan dei hadde eg ikkje greidd å fullføre denne oppgåva. Takk for all hjelp med barnepass, middagar, støtte og heiarop.

Vigra, 30. november 2020

Maria Hauge Blindheim

Innhald

Abstract i
Samandrag ii
Forord iii
Figurliste v
Tabelliste vi
1 Innleiing 1
1.1 Bakgrunn for val av tema 2
1.2 Forskingsspørsmål og føremål 3
1.3 Oppbygging av oppgåva 3
1.4 Klargjering av omgrep 4
2 Kunnskapsgrunnlag 5
2.1 Relasjonell og instrumentell forståing i matematikken 5
2.2 Matematisk kompetanse og ferdigheiter 6
2.2.1 Matematisk kompetanse 7
2.2.2 Matematiske ferdigheiter 10
2.2.3 Matematisk kunnskap for undervisning 12
2.3 Likskapsteiknet 14
2.3.1 Forståing av likskapsteiknet og forsking på emnet 15
2.3.2 Kompetansemål i læreplanen (LK06) knytt til likskapsteiknet 19
2.3.3 Utfordringar med likskapsteiknet 20
2.3.4 Lærarar si forståing og undervisning av likskap og likskapsteiknet 22
3 Metode 25
3.1 Forskingsdesign 25
3.1.1 Kvalitative metodar, fenomenologi og hermeneutikk 26
3.1.2 Oppgåvebasert intervju 27
3.2 Datainnsamling 28
3.2.1 Utval 28
3.2.2 Oppgåver 30
3.2.3 Gjennomføring av intervjua 32
3.3 Analyse 33
3.4 Reliabilitet og validitet 36
3.4.1 Reliabilitet 37
3.4.2 Validitet 37
3.5 Forskingsetiske vurderingar 39

4 Analyse 40
4.1 Analyse av oppgåvene 40
4.1.1 Espen 40
4.1.2 Sam 42
4.1.3 Lise 44
4.1.4 Pia 48
4.1.5 Lars 53
4.1.6 Alice 56
4.1.7 Even 59
5 Drøfting 63
5.1 Ekvivalensteikn eller operator? 63
5.1.1 Definering av likskapsteiknet 63
5.1.2 Operasjonell forståing eller ekvivalensforståing 64
5.1.3 Bør ein vere bekymra for elevar som har ei operasjonell forståing? 64
5.2 Instrumentell og relasjonell forståing 65
5.3 Elevane sin matematiske kompetanse og matematiske ferdigheiter 67
5.4 Undervisning av ekvivalens og bruken av likskapsteiknet i grunnskulen 69
6 Avslutning 73
6.1 Frampeik og vidare forsking 74
6.2 Personleg refleksjon 74
6.3 Svakheiter i studien 75
Litteraturliste 76
Vedlegg I
Vedlegg 1 – Oppgåvesett 2 I
Vedlegg 2 – Svar frå NSD Personvernombodet i samband med datainnsamlinga II
Vedlegg 3 – Informasjonsskriv og samtykkeskjema V

Figurliste

Figur 1 - Representasjon av dei åtte kompetansane (Niss & Jensen, 2002, s. 45) 9
Figur 2 - Samanvevinga av dei fem trådane (Kilpatrick et al., 2001, s.117) 11
Figur 3 - Matematisk kunnskap for undervisning (Ball et al., 2008, s. 403) 13
Figur 4 - Oppgåve 5 30
Figur 5 - Oppgåve 21 30
Figur 6 - Oppgåve 51 31

Tabelliste

Tabell 1 - Tabell av Rittle-Johnson et al. (2011, s. 3) sitt rammeverk. 19
Tabell 2 - Kategoriar for forståing 34
Tabell 3 - Kategoriar for instrumentell og relasjonell forståing... 35

1 Innleiing

I norsk skule vert det til stadigheit gjennomført ulike testar der ein samanliknar ulike land sine faglege prestasjonar, også matematikk. Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) er ei internasjonal studie i matematikk og naturfag for grunnskulen i regi av International Association for the Evaluation og Educational Achievement (IEA). TIMSS har vore gjennomført kvart fjerde år frå og med 1995.

Grønmo, Hole og Onstad (2017, s. 40) har forska på resultata frå TIMSS på barnetrinnet og ungdomstrinnet, og resultata viser at det frå 2011 til 2015 ikkje har vore noko framgang i prestasjonane i matematikk på barnetrinnet, medan det på ungdomstrinnet er det ei generell forbetring i perioden. Dette kan ein sjå i rapporten «Vi kan lykkes i realfag – Resultater og analyser frå TIMSS 2015» (Bergem, Kaarstein & Nilsen, 2016). I rapporten står det at for 4.trinn er det inga signifikant endring i matematikkskåren frå 2011 til 2015 og dei presterer svakast i emneområdet *Tall* (Bergem, 2016, s. 39). Det har generelt vore positiv utvikling i prestasjonane i matematikk på 8.trinn i perioden 2007 til 2015, men eit emneområde skil seg ut frå dei andre. Dei norske elevane skårar nemleg svært lågt i emneområdet *Algebra* (Bergem, 2016, s. 41). Grønmo et al. (2017, s. 40) skriv at på grunn av dette får vi eit konsistent bilete av at algebra er eit område som er eit stort problem i norsk skule. Også i TIMSS-rapporten frå 2011 (Grønmo et al., 2012) legg dei merke til svake norske resultat innan området. Dei viser til at det kan vere på grunn av at dei norske elevane var blant dei yngste som gjennomførte TIMSS 2011, og algebra tradisjonelt er eit emne som kjem seint i grunnskulen. Dei meiner likevel at eit så svakt resultat må ha ei større forklaring (Grønmo et al., 2012, s. 26). Dei skriv vidare at ein kan «konkludere med at dette er et uttrykk for at algebra ikke anses som så viktig å undervise i norsk skole» (Grønmo et al., 2012, s. 26), og denne konklusjonen samsvarar med det ein har sett i tidlegare internasjonale studiar tilbake til 1995.

Grønmo et al. (2017, s. 40) skriv at ein kan sjå på tal og talrekning som det mest grunnleggande elevane må lære i matematikk fordi det er grunnlaget for vidare læring, og spesielt algebra. Dei skriv også at «Det er derfor problematisk at norske elevers prestasjoner er svakest på de mest grunnleggende områdene i matematikk, som tall på barnetrinnet og algebra senere i skolen» (Grønmo et al., 2017, s. 40). Grunnleggjande ferdigheiter og forståing av aritmetikk, tal og algebra er viktig for alle som nytter matematikk (Grønmo et al., 2012, s. 27). Dette gjeld svært mange i ulike yrker og profesjonar, sjølv om ein kanskje ikkje tenker over det.

I den nye læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020) står det om kjerneelement i faget. Eit av dei er «Matematiske kunnskapsområde», som er svært likt det som i den gamle læreplanen vart kalla «hovudområde». I desse kunnskapsområda finn vi både tal og talforståing, og algebra. I læreplanen bli det spesifisert at «Elevane må tidleg få eit godt talomgrep og få utvikle varierte reknestrategiar. Algebra handlar om å utforske strukturar, mønster og relasjonar og er ein viktig føresetnad for at elevane skal kunne generalisere og modellere i matematikk.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3). Det står også at desse to saman med dei andre kunnskapsområda «… dannar grunnlaget som elevane treng for å utvikle matematisk forståing ved å utforske samanhengar innanfor og mellom dei matematiske kunnskapsområda.» (Utdanningsdirektoratet, 2020, s. 3-4). Denne vissheita om tal og algebra si viktige rolle i matematikken og norske elevar sine svake prestasjonar innanfor områda gjer at det er relevant å sjå nærmare på det i samanheng med matematikkdidaktisk forsking.

1.1 Bakgrunn for val av tema

Innan tematikken tal og algebra er bruk av symbol sentralt, og det er éit teikn som vi brukar frå vi startar med opplæring i matematikk og som følgjer oss heile vegen vidare. Dette teiknet er likskapsteiknet.

Eg har gjennom undervisning i matematikk på ungdomstrinnet stadig fått høyre frå elevar at dei synes algebra er vanskeleg og at dei ikkje skjønar kva dei skal med det. Noko av det kan kanskje henge saman med den matematikkbakgrunnen og dei matematiske erfaringane dei har med seg, og korleis dei forstår dei matematiske teikna vi nyttar. Eg har fleire gongar sett at elevar ikkje nyttar likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn, men heller som ei vidareføring mellom utrekningane. Eksempelvis når dei har fått gitt reknestykke som inneheld fleire ledd slik som dette: $12 + 4 - 9 =$. Då har eg opplevd at elevane skriv utrekninga slik $12 + 4 = 16 - 9 = 7$. I denne utrekninga blir likskapen usann i første del sidan det ikkje er same talverdi på begge sider av likskapsteiknet. Eg har lurt på kvifor dette dukkar opp i klasserommet, og kva det kan skuldast. Ser ein det i samanheng med resultata i TIMSS-studiane og funna derfrå kan det tenkast at det kan ha noko å gjere med den tidlegare matematikkopplæringa deira.

På bakgrunn av dette har eg tatt utgangspunkt i temaet elevar si forståing av likskapsteiknet. Med bakgrunnen min som grunnskulelærar for 5. – 10. trinn er det naturleg at eg rettar meg inn mot denne aldersgruppa i forskingsarbeidet.

1.2 Forskingsspørsmål og føremål

For å sjå nærmare på elevar si forståing av likskapsteiknet har eg formulert dette forskingsspørsmålet:

Korleis forstår nokre elevar frå mellomtrinnet og ungdomstrinnet likskapsteiknet?

For å kunne svare på forskingsspørsmålet vil det vere naudsynt å forklare om kva som ligg i matematisk forståing, kva ein forstår med likskapsteiknet og kva eg meiner ligg i forståing av likskapsteiknet.

Føremålet med oppgåva er å få ei betre forståing av korleis nokre elevar forstår og nyttar likskapsteiknet. Eg har valt å nytte ordet *nokre* i forskingsspørsmålet fordi denne oppgåva ikkje kan seie noko om korleis alle elevar forstår likskapsteiknet. Målet er å få eit innblikk i korleis elevar *kan* forstå likskapsteiknet og med bakgrunn i det gjere meg tankar om kva desse resultata skuldast. Oppgåva tek utgangspunkt i eit relativt lite datamateriale slik at eg må vere forsiktig med å trekke konklusjonar om alle elevar der eg ikkje har grunnlag for det.

Ein anna sentral opplysning i samband med oppgåva er at då eg starta på denne oppgåva var dei gamle læreplanane gjeldande for heile grunnskulen. Undervegs i forskingsarbeidet har den nye læreplanen i matematikk frå Kunnskapsløftet 2020 (Utdanningsdirektoratet, 2020), blitt innført for 1.-9. trinn. I kunnskapsgrunnlaget mitt har eg tatt utgangspunkt i den gamle læreplanen i matematikk frå Kunnskapsløftet (LK06) (Utdanningsdirektoratet, 2013), og så vil eg heller i drøftingsdelen sjå om det er noko som kan trekkast opp mot den nye læreplanen.

1.3 Oppbygging av oppgåva

I dette første kapitelet har eg gjort greie for kva som ligg til grunn for val av oppgåve, forskingsspørsmålet mitt og føremålet med oppgåva. Det neste kapitelet kallar eg kunnskapsgrunnlag der eg går gjennom relevant teori og bakgrunnskunnskap som eg har sett trengs for å kunne belyse forskingsspørsmålet gjennom analysen og drøftinga seinare i oppgåva. Kapittel 3 er metodekapittel der eg ser på bakgrunnen for val av metode, korleis datainnsamlinga vart gjennomført, oppgåva sin reliabilitet og validitet og kva etiske omsyn som er tatt. Deretter kjem analysedelen der analysane av intervjua og funna i intervjua lagt fram, og i kapittel 5 legg eg fram sentrale funn frå analysen og drøftar desse i lys av teorien. Til slutt kjem det avsluttande kapitelet der eg samlar oppgåva og svarar på forskingsspørsmålet mitt. Eg kjem med frampeik til vidare forsking og kritikk av studiet. Det avsluttande kapitelet inneheld også ein del om personelg refleksjon der eg ser på korleis eg sjølv har hatt nytte av denne forskingsprosessen og kva eg tek med meg vidare i mitt virke som lærar.

1.4 Klargjering av omgrep

I denne oppgåva skriv eg om likskapsteiknet som er eit relasjonssymbol og om relasjonell forståing. Eg har nytta ordet relasjonell om det i oppgåva som omhandlar relasjonell forståing knytt til Skemp (2006). Opp mot likskapsteiknet har eg prøvd i stor grad å nytte meg av ordet relasjonssymbol, relasjonsoperator eller ekvivalensteikn. To av kategoriane i rammeverket inneheld ordet relasjonsforståing. Dette ordet er knytt til likskapsteiknet som eit relasjonssymbol og ikkje til relasjonell forståing definert av Skemp (2006).

2 Kunnskapsgrunnlag

I dette kapitelet vil eg sjå på matematisk forståing, matematisk kompetanse, matematiske ferdigheiter og likskapsteiknet. Første delkapittel omhandlar relasjonell og instrumentell matematisk forståing. I det neste vil eg sjå nærmare på kva som står i læreplanen om matematisk kompetanse og korleis ein kan tolke matematisk kompetanse. På slutten av dette delkapitelet ser eg på kva kompetanse matematikklærarar treng. Dette har eg tatt med som ein del av kunnskapsgrunnlaget då det i forskinga (Hill, Rowan & Ball, 2005; Vermeulen & Meyer, 2017) ser ut til at elevar sine prestasjonar er påverka av læraren sin kompetanse, og det vil derfor vere grunnlag for å diskutere dette i etterkant av analysen. Deretter vil eg sjå nærmare på kva likskapsteiknet tyder og korleis ein kan forstå likskapsteiknet. Her ser eg først på forsking som er gjort på feltet og deretter trekk eg fram to tolkingar som er relevante i denne oppgåva, før eg ser nærmare på eit rammeverk for forståing av likskapsteiknet og likskap. Avslutningsvis ser eg litt på forsking gjort på lærarar si forståing av likskap og likskapsteiknet.

2.1 Relasjonell og instrumentell forståing i matematikken

Dei matematiske kompetansane og ferdigheitene som er skildra over er tett knytt til forståing. Forståing i matematikk er sentralt, og for å kunne rekne og trekke slutningar treng vi forståing. I følgje Skemp (2006) kan vi skilje mellom «relational understanding» og «instrumental understanding», fornorska til relasjonell og instrumentell forståing. Skemp (2006, s. 89) definerer relasjonell forståing som å vete kva ein skal gjere og kvifor, medan instrumentell forståing er «rules without reason». Sistnemnde inneber altså å kunne ein regel og kunne nytte den, men utan å ha ei forståing for kvifor dei kan nytte den. Mange elevar og lærarar meiner dette er å ha forståing i matematikk seier Skemp (2006, s. 89). Det er fleire eksempel på desse «reglane» som mange kan og veit kva tid dei skal nyttast, men som dei kanskje ikkje veit kvifor ein kan nytte dei. Eksempel som Skemp (2006, s. 89) trekk fram er låning ved subtraksjon, snu den bakarste brøken og gong med den fremste, og «flytt og bytt»-regelen. Dette er reglar som alle kjenner til og som dei fleste nyttar utan å tenke noko meir over det. Dette har eg sjølv opplevd å gjere i eigen skulegang, og eg har som lærar sett elevar gjere det same. I begge tilfelle har eg opplevinga av at eg sjølv og elevane meiner at vi har forstått det vi gjer.

Skemp (2006) vel å skildre kva fordelar instrumentell forståing i matematikk kan ha, fordi det er mange lærarar som underviser matematikk som gir denne forståinga. Han har kome fram til tre fordelar med det. Den første fordelen er at kan vere mykje lettare å forstå matematikken instrumentelt, og viss ein berre er ute etter rette svar kan det å ha instrumentell forståing vere svært effektivt (Skemp, 2006, s. 92). Fordel nummer to er at ein ser vinninga raskare og tydlegare, og det er viktig å ikkje undervurdere kor viktig det er for elevar å kjenne på suksess. Dersom ein treng å opparbeide sjølvtillit og kjenne på suksessen er det lettare og raskare å få dette til med matematikk som berre er avhengig av instrumentell forståing. Den siste fordelen Skemp (2006, s. 92) trekk fram er at den instrumentelle tenkinga ofte kan gi det rette svaret raskare og meir påliteleg enn relasjonell tenking.

Skemp (2006, s. 92) trekk også fram fire fordelar ved relasjonell forståing i matematikk. Har ein relasjonelle forståing i matematikken er ein meir tilpassingsdyktig til nye oppgåver og med relasjonell forståing kan ein tilpasse metodar ein har lært til andre situasjonar, fordi ein forstår kvifor ein kan nytte den til bestemte situasjonar. Fordi relasjonell forståing gjer det mogleg å sjå samanhengar og heilskapen, er det er også lettare å hugse matematikk. Den tredje fordelen han trekk fram er at det kan vere eit effektivt mål i seg sjølv å oppnå relasjonell forståing, og det er sjeldnare behov for eksterne premiar eller straffar for å motivere. Den siste fordelen seier Skemp (2006, s. 93) er tett knytt til den tredje og at når den relasjonelle forståinga er motiverande kan det gjere at ein søker mot nytt materiale og utforskar nye område.

I artikkelen sin skriv Skemp (2006, s. 95) at ved å ha instrumentell forståing kan elevane løyse oppgåver når dei er gitt på ein bestemt måte, men dei ser ikkje samanhengane mellom dei ulike stega i ein problemløysingssituasjon og vil vere avhengige av hjelp når dei møter nye oppgåver som ikkje ser likeins ut. I motsetning så vil ein med relasjonell forståing ha bygd opp skjema som inneheld ulike løysingsmåtar og samanhengar mellom dei slik at ein lettare kan finne fram til løysinga av nye oppgåver som ein ikkje har sett før.

Det kan vere vanskeleg å avgjere om ein elev har relasjonell eller instrumentell forståing sidan det omhandlar mentale prosessar, og samtale med den enkelte vil då vere ein måte å kunne få innsikt i dette på (Skemp, 2009, s.93).

2.2 Matematisk kompetanse og ferdigheiter

Å utvikle matematisk forståing krev at ein har matematisk kompetanse og matematiske ferdigheiter. Desse to omgrepa vil eg sjå nærmare på her.

Eg spurte mine elevar kva det ville sei å ha matematisk kompetanse og ferdigheitar. Då fekk eg til svar at det var å få til matta. Dei tenkte då på dei som greidde å gjere leksene utan hjelp. «Dei som er gode i matte er dei som får til alle oppgåvene!» var eit av svara eg fekk. Tradisjonelt sett har ein kanskje sett på gode matematiske ferdigheiter som det å kunne finne svaret eller å rekne ut flest oppgåver på kortast tid. I seinare tid har fleire sentrale fagpersonar kome opp med eit langt meir samansett kompetanseomgrep. Dette har medført ei endring hos dei som sit med læreplanar, om enn ikkje hos elevane. Ein kan for eksempel sjå tydelege liner mellom læreplanane i matematikk i Kunnskapsløftet (LK06) (Utdanningsdirektoratet, 2013) og Niss og Jensen (2002) sine tankar rundt «matematiske kompetencer».

2.2.1 Matematisk kompetanse

I *Læreplanen i matematikk fellesfag* (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2) står det at solid matematisk kompetanse er ein føresetnad for utvikling av samfunnet og ein treng matematisk kompetanse for å forstå og kunne påverke prosessar i samfunnet. Vidare i læreplanen står det at «Matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det og vurdere kor gyldig løysinga er» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). I dette er det også eit språkleg aspekt som omhandlar formidling, samtale om og resonnering omkring idear. Det står også at matematisk kompetanse er viktig for den einskilde og det er viktig for deltaking i samfunnet. I skulen skal matematikkfaget medverke til å utvikle denne kompetansen (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). I læreplanen står det også om grunnleggjande ferdigheiter som er integrert i kompetansemåla. Dei grunnleggjande ferdigheitene i matematikk skildrar Utdanningsdirektoratet (2013, s. 4-5) slik:

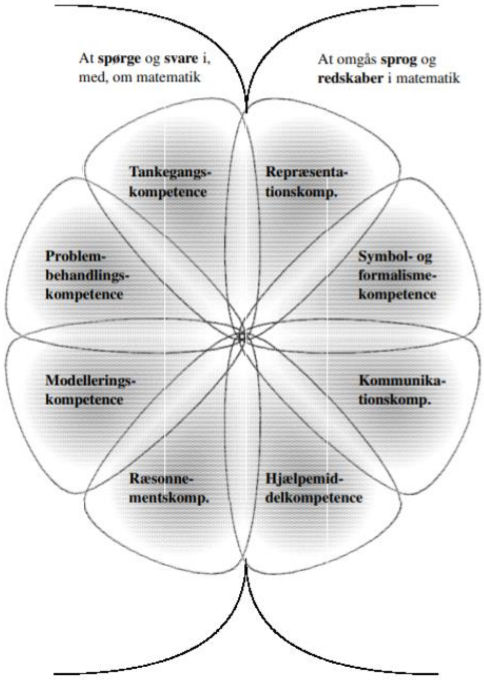
- Munnlege ferdigheiter – Skape meining gjennom å lytte, tale og samtale om matematikk.
- Å kunne skrive i matematikk – Beskrive og forklare ein tankegang og setje ord på oppdagingar og idear.
- Å kunne lese i matematikk – Å forstå og bruke symbolspråk og uttrykksformer for å skape meining i tekstar
- Å kunne rekne i matematikk – Å bruke symbolspråk, matematiske omgrep, framgangsmåtar og varierte strategiar til problemløysing og utforsking.
- Digitale ferdigheiter – Å bruke digitale verktøy til læring gjennom spel, utforsking, visualisering og presentasjon.

Utvikling av desse ferdigheitene skal skje i skulen, og skal vere med på utvikle den matematiske kompetansen. Ein kan sjå at det som står i læreplanen kan knytast opp mot arbeid som er gjort i Danmark og Amerika med tanke på matematisk kompetanse og matematiske ferdigheiter.

Frå Danmark finn vi rapporten *Kompetencer og matematikklæring* (2002) der Niss og Jensen skriv om matematisk kompetanse. Niss og Jensen (2002, s. 43) skriv at ein person har kompetanse innan eit område viss han eller ho faktisk er i stand til å vise gjennomslagskraft, overblikk, sikkerheit og dømmekraft innanfor det gjeldande området. Vidare skriv dei at i matematisk samanheng betyr det å ha matematisk kompetanse «å ha viten om, å forstå, utøve, anvende, og kunne ta stilling til matematikk og matematikkverksemd i eit mangfald av samanhengar der matematikk inngår eller kan inngå» (Niss & Jensen, 2002, s. 43).

Vidare i rapporten definerer dei éin matematisk kompetanse er som ein sjølvstendig, rimeleg avgrensa hovudkomponent i den matematiske kompetansen (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Ein kan seie at «éin matematisk kompetanse er innsiktsfull beredskap til å handle hensiktsmessig i situasjonar som rommar ein bestemt slags matematiske utfordringar» (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Dei presiserer vidare at ulike matematiske kompetansar ikkje er uavhengige og avgrensa utan overlapp, og dette betyr at ein kompetanse ikkje kan ervervast eller holdast i isolasjon frå andre kompetansar (Niss & Jensen, 2002, s. 43). Dei skildrar åtte matematiske kompetansar som er knytt saman, men har kvar sin identitet, som til saman skildrar matematisk kompetanse (2002, s. 44). Desse åtte kompetansane kan ein dele inn i to grupper: «Å kunne spørje og svare i og med matematikk» og «Å kunne handtere matematikkens språk og reiskapar». I den første gruppa finn vi dei fire kompetansane: tankegangs-, problembehandlings-, modellerings- og resonnementkompetanse. I den andre har vi; representasjons-, symbol og formalitets-, kommunikasjons- og hjelpemiddelkompetanse. Sjølv om ein kan dele dei i to grupper skal ein ikkje skilje dei frå kvarandre fordi alle kompetansane er tett knytt saman.

Figur 1 skildrar dei åtte kompetansane som alle heng saman med kvarandre. Nokon meir enn andre. Alle kompetansane har ei undersøkande og ei produktiv side. Der den produktive sida går på det at ein sjølv kan gjennomføre dei prosessane som kompetansen omhandlar, og den undersøkande sida går på forståing, analyse og kritisk vurdering av dei utførte prosessane og deira produkt (Niss & Jensen, 2002, s. 63-64). Den undersøkande sida må vere utvikla for å forstå relasjonelt slik som Skemp (2006) skildrar det.



Figur 1 - Representasjon av dei åtte kompetansane (Niss & Jensen, 2002, s. 45)

Å kunne spørje og svare i og med matematikk

Tankeganskompetansen omhandlar i følgje Niss og Jensen (2002, s. 47) å vere klar over kva spørsmål som er karakteristiske for matematikk, kunne stille slike spørsmål og kunne sjå kva typar svar som kan forventast. Den omhandlar også det å kjenne, forstå og handtere matematiske omgrep si rekkevidde og forankring i ulike domene. Ein skal og kunne skilje mellom ulike matematiske utsegn og påstandar. Problembehandlingskompetanse omhandlar å kunne stille opp og løyse forskjellige matematiske problem, både dei ein har laga sjølv og andre sine (Niss & Jensen, 2002, s. 49). Modelleringskompetanse skildrar Niss og Jensen (2002, s. 52) som å kunne analysere grunnlaget for eigenskapane ved eksisterande modellar og kunne vurdere dei. Ein må kunne avkode og tolke modellelement og resultat i forhold til det som er modellert og ein må kunne lage modellar i ikkje-matematiske situasjonar. Niss og Jensen (2002, s. 54) skildrar resonnementskompetanse som at ein skal kunne følgje og bedømme eit matematisk resonnement, og forstå kva eit matematisk bevis er og korleis det skil seg frå andre matematiske resonnement. Ein må også kunne tenke ut og gjennomføre uformelle og formelle resonnement, og kunne gjere om resonnement til bevis.

Å kunne handtere matematikkens språk og reiskapar

I følgje Niss og Jensen (2002, s. 56) består representasjonskompetanse av å kunne forstå og nytte ulike representasjonar av matematiske objekt, fenomen, problem eller situasjonar. Den består også av å kunne forstå dei innbyrdes forbindingane mellom dei ulike representasjonsformene for eit tilfelle og av å kunne velje og omsette mellom representasjonar etter situasjon og føremål. Symbol- og formalitetskompetanse omhandlar å kunne avkode symbol- og formelspråk, å kunne omsette fram og tilbake mellom symbolrikt matematisk språk og naturleg språk, og å kunne behandle og bruke symbolholdige utsegn og uttrykk (Niss & Jensen, 2002, s. 58). Den omhandlar også det å ha innsikt i karakteren av og dei gjeldande reglane for formelle matematiske system. Dei seier at kommunikasjonskompetanse består av å kunne sette seg inn i og tolke matematiske skriftlege, munnlege eller visuelle utsegn og tekstar (Niss & Jensen, 2002, s. 60). Det består også av å kunne uttrykke seg på ulike måtar og på ulike teoretiske nivå om matematiske saker (Niss & Jensen, 2002, s. 60). Til slutt har vi hjelpemiddelkompetanse som i følgje Niss og Jensen (2002, s. 62) omhandlar å ha kjennskap til eksistensen og eigenskapane til relevante reiskapar til bruk i matematisk verksemd. Ein har innblikk i kva moglegheiter og avgrensingar reiskapane har i ulike situasjonar, og ein skal kunne nytte seg av desse hjelpemidla på ein reflektert måte (Niss & Jensen, 2002, s. 62).

Nokre av desse kompetansane heng tettare i hop enn andre gjer, dette vert også framheva av Niss og Jensen (2002). Tre av dei er representasjon, symbol- og formalitet og kommunikasjonskompetansen. Inn i representasjonar spelar symbol ei viktig rolle, og kan ha mykje å sei for korleis det matematiske er representert. Både representasjonar og symbol er med på å danne grunnlaget for den kommunikasjonen som skal skje matematisk.

Tre dimensjonar rundt det å ha ein kompetanse

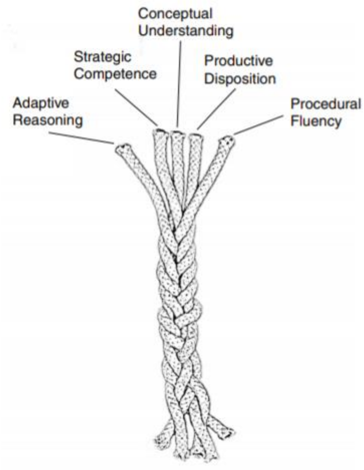
Niss og Jensen (2002) argumenterer for at det gir meining å tenke at ein person sin kompetanse kan ha tre dimensjonar. Desse tre dimensjonane kallar dei dekningsgrad, aksjonsradius og teknisk nivå. Dekningsgrada omhandlar alle aspekta som kompetansen inneheld og i kor stor grad ein aktiverer desse i situasjonar ein står i. Aksjonsradius er alle dei samanhengar og situasjonar som personen kan aktivere kompetansen i. Dess fleire situasjonar ein kan nytte kompetansen i, dess større aksjonsradius. Den siste dimensjonen, teknisk nivå, går på vanskegrada av innhaldet i situasjonen eller oppgåva. Desse tre dimensjonane kan ein knyte opp mot det å ha relasjonell forståing. Om ein har utvikla kompetansane i alle dei tre dimensjonane har ein bygd seg opp skjema som gjer at ein kan sjå samanhengar og forstå og nytte seg av dei.

2.2.2 Matematiske ferdigheiter

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001, s. 116) skildrar det dei kallar «mathematical proficiency», matematiske ferdigheiter, som det dei meiner trengs for å vellykka lære matematikk. Dei seier vidare at matematiske ferdigheiter kan delast inn i fem trådar som kvar representerer ulike aspekt av det heile. Dei fem trådane dei skildrar er:

- Conceptual understanding – *Forståing*, forståing av matematiske omgrep, konsept, operasjonar og relasjonar.
- Procedural fluency – *Prosedyrekunnskap*, evner til å rekne fleksibelt, nøyaktig, effektivt og hensiktsmessig.
- Strategic competence – *Strategisk kompetanse*, evne til å formulere, representere og løyse matematiske problem.
- Adaptive reasoning – *Tilpassande resonnering*, kapasitet til å tenke logisk, reflektere, forklare og bevise.
- Productive disposition – *Produktiv haldning*, tilbøyelegheit til å sjå matematikk som fornuftig, nyttig og verdifullt saman med ei tru på flid og eigen produktivitet.

Dei påpeikar at dei fem trådane er «samanvevd og gjensidig avhengige i utviklinga av matematiske ferdigheiter» (Kilpatrick et al., 2001, s. 116). Dette kan ein sjå i figuren under.



Figur 2 - Samanvevinga av dei fem trådane (Kilpatrick et al., 2001, s.117)

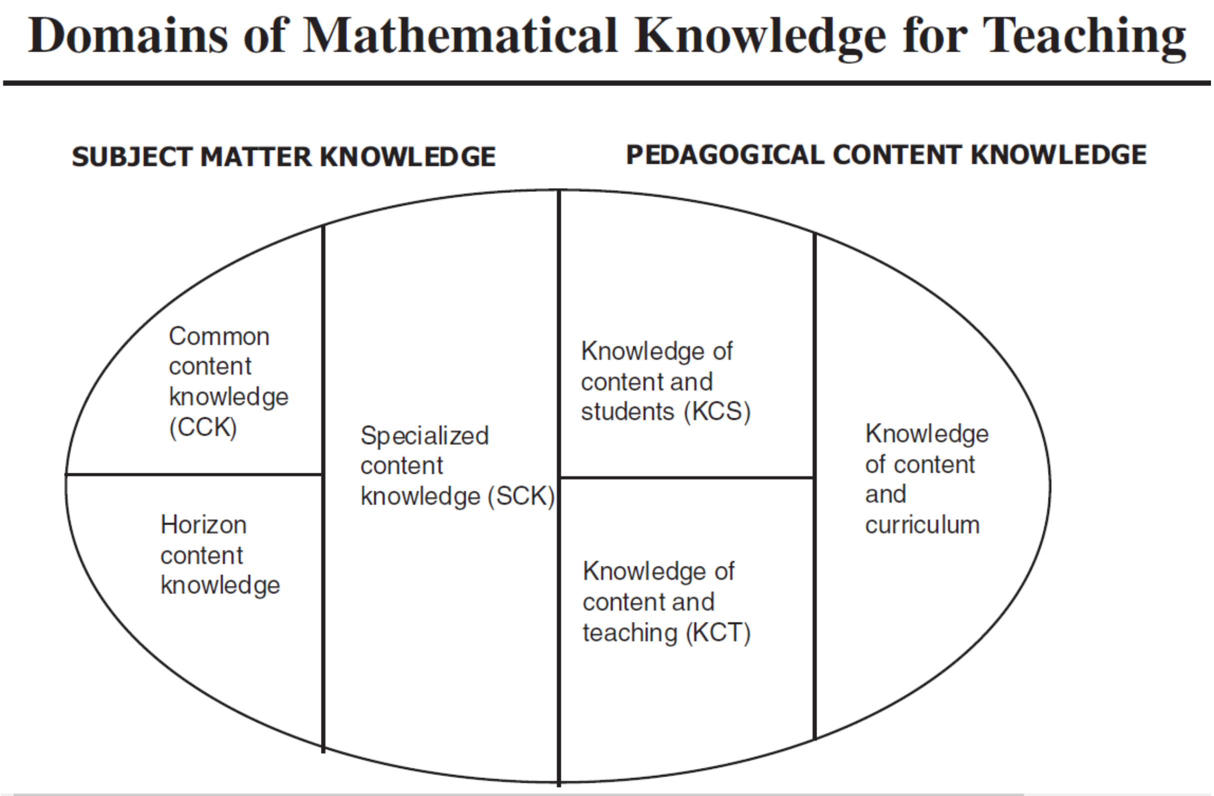
Altså er trådane knytt saman sjølv om dei er sjølvstendige. Vidare skriv Kilpatrick et al. (2001, s. 116) at matematiske ferdigheiter ikkje er eit einsidig fenomen, og ein kan ikkje oppnå det berre ved å fokusere på ein eller to av desse trådane. I skulen må ein jobbe mot at elevane skal utvikle matematiske ferdigheiter slik at dei kan handtere matematiske utfordringar i daglegl ivet og mogleggjere vidare studiar av matematikk.

Ein kan sjå med trådane til Kilpatrick et al. (2001) saman med Niss og Jensen (2002) sine kompetansar. Trådane som er tvinna saman og dei åtte kompetansane som er tett knytt saman med kvarandre symboliserer korleis ferdigheitene og kompetansane ikkje kan sjåast isolert. Det er også mykje av innhaldet som er likt i dei to rammeverka. Tankeganskompetansen, representasjonskompetansen og symbol- og formalitetskompetansen som Niss og Jensen skildrar kan sjåast på som ganske likt Kilpatrick et al. (2001) sin tråd *forståing* sidan dei omhandlar forståing og arbeid med matematiske omgrep, konsept, operasjonar og relasjonar, og det å kunne nytte ulike representasjonar i matematikken. Både problemløysingskompetansen og modelleringskompetansen kan ein knyte opp mot Kilpatrick et al. (2001) sine trådar prosedyrekunnskap og strategisk kompetanse sidan dei alle omhandlar det å formulere og løyse matematiske problem, og analyse av og arbeid med matematiske modellar. Den tilpassande resonneringa til Kilpatrick et al. (2001) er inne på det same som resonnementskompetansen og kommunikasjonskompetansen til Niss og Jensen (2002) der dei alle har fokus på å tenke logisk og å kunne resonnere og gjennomføre bevis. Dei inneber også å kunne tilpasse uttrykksforma ovanfor mottakarane. Hjelpemiddelkompetansen til Niss og Jensen (2002) kan ein sjå opp mot prosedyrekunnskapen og den strategiske kompetansen til Kilpatrick et al. (2001) sidan det handlar om å rekne hensiktsmessig og det å kunne representere/stille opp matematiske problem.

2.2.3 Matematisk kunnskap for undervisning

I stortingsmelding 30 (Kunnskapsdepartementet, 2003-2004, s. 94) står det: «Av alle ressurser i skolen er lærernes kompetanse den faktoren som påvirker elevenes prestasjoner mest». Denne påstanden finn ein grunnlag for også i nyare forsking. Mellom anna har Hill, Rowan og Ball (2005, s. 399) gjort funn av at lærarane sin matematiske kunnskap for undervisning hadde ei positiv verknad på forbetring av matematikkprestasjonar hos elevar i første og tredje klasse. I TIMSS-rapporten frå 2015 viser analysane ein positiv samanheng mellom dei faglege aspekta ved lærarkompetanse, undervisningskvalitet og elevane sine prestasjonar i naturfag på 9. trinn. Desse studia peikar mot at læraren sin kompetanse har stor verknad på elevane sine prestasjonar.

I artikkelen *Content Knowledge for Teaching: What makes it special?* ser Ball, Thames og Phelps (2008) korleis forståing av innhald påverkar undervisning i matematikk. Ball et al. (2008, s. 391) referer til Shulman (1986) som argumenterer at det å forstå eit fag for å undervise krev meir enn å forstå fakta og konsept i faget. Lærarar må i tillegg til å forstå at noko er på ein bestemt måte, også vete kvifor det er slik. Ball et al. (2008) har sett på kva lærarar må kunne matematisk og kva må dei kunne for å undervise effektivt. I dette arbeidet definerer dei *matematisk kunnskap for undervisning*, som den matematiske kunnskapen som er nødvendig for å utføre dei gjentakande oppgåvene ved å lære vekk matematikk til elevar (Ball et al., 2008, s. 399).



Figur 3 - Matematisk kunnskap for undervisning (Ball et al., 2008, s. 403)

Common content knowledge (CCK) er eit av domena ved denne kunnskapen. Ball et al. (2008, s. 399) seier at det er den matematiske kunnskapen og evnene nytta i andre settingar enn undervisning. Som for eksempel å vete kva tid elevane gir gale svar, eller når læreboka gir unøyaktige definisjonar. Det omhandlar også å nytte termar og notasjon på rett måte.

I domenet *Horizon content knowledge* legg Ball et al. (2008, s. 403) at lærarane må vere oppmerksame på korleis matematiske emne er relatert til kvarandre i løpet av undervisningsløp. For eksempel må ein førsteklasselærar må vere klar over at det dei underviser skal vere eit grunnlag for noko elevane skal bygge vidare på i seinare årssteg.

Specialized content knowledge (SCK) er den matematiske kunnskapen og evnene som er unike for undervisning. Det omhandlar den kunnskapen som ein lærar treng for å avkode det elevane seier, skriv og gjer, og ein må tenke på matematikken på ein annan måte (Ball et al., 2008, s. 400). Ball et al. (2008, s. 400) skriv at undervisning krev ein kunnskap som går lenger enn det ein lærer vekk til elevane.

Lærarar må tenke ut kva det er sannsynleg at elevane vil tenkje og kva som vil vere forvirrande for dei. Ball et al. (2008, s. 401) kallar dette *Knowledge of content and students* (KCS). Dette må ein tenke på i undervisninga når ein vel eksempel og oppgåver som elevane skal løyse. Ein må også kunne tolke tenkinga til elevane. Desse tinga krev at ein koplar saman matematisk forståing og kjennskap til elevane og deira matematiske tenking. Sentralt her er kunnskapen om oppfatningar og misoppfatningar som er vanlege hos elevar innanfor ulike matematiske område.

Knowledge of content and teaching (KCT) kombinerer kunnskap om undervisning og kunnskap om matematikk (Ball et al., 2008, s. 401). Det omhandlar korleis ein legg opp undervisninga ut frå kva ein skal lære, kva oppgåver bør ein starte med og kva oppgåver bør ein gå vidare med. Lærarar evaluerer kva undervisningsmetodar som er hensiktsmessige ut frå kva matematisk emne ein skal lære.

Lærarar må forstå og ha kunnskap om det faget dei underviser. Ball et al. (2008, s. 404) konkluderer med at lærarar som ikkje forstår eit fag godt nok sjølv vil nok ikkje ha kunnskapen som trengs for å hjelpe elevane til å lære innhaldet. Det er likevel ikkje nok berre å forstå faget godt når ein skal undervise. Lærarar må forstå matematikk på ein slik måte at ein kan sjå korleis elevar har tenkt, eventuell misoppfatningar dei har og forstå den slik at ein kan gjere det forståeleg til elevane (Ball et al., 2008, s. 404). Lærarar må altså ha ein solid matematisk kompetanse som Niss og Jensen (2002) skildrar, og ha utvikla matematiske ferdigheiter (Kilpatrick et al., 2001) på alle felt i botnen for å kunne undervise matematikk. I tillegg må dei ha ein utvida kunnskap om matematikkfaget knytt opp mot korleis elevar tenkjer, lærer og forstår for å kunne hjelpe dei til å forstå og lære.

2.3 Likskapsteiknet

Likskapsteiknet er eit symbol av typen logogram. Eit logogram er eit symbol som vert nytta i ein bestemt matematisk samanheng og som står for eit bestemt ord eller omgrep (Hana, 2013, s. 156). Likskapsteiknet vert også kalla ein relasjonsoperator og nyttast for å skildre relasjonen mellom andre objekt (Hana, 2013, s. 160). Vi kjenner likskapsteiknet med symbolet = og i følgje Store Norske Leksikon ("Likhetstegn," 2017) angir teiknet det at det som står til venstre for teiknet har same verdi som det som står til høgre ("Likhetstegn," 2017). Dette kallar vi ekvivalens. Darr (2003, s. 4) seier at frå ein matematisk ståstad er ikkje likskapsteiknet ein kommando for å gjere noko, men eit symbol for ein relasjon, ein ekvivalensrelasjon. Vi blir kjend med likskapsteiknet tidleg i skulegangen og vi møter på det kvar gong vi går vidare. Likskapsteiknet er så allstadnærverande på alle matematiske nivå og det kan derfor argumenterast for at det er viktig (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006).

2.3.1 Forståing av likskapsteiknet og forsking på emnet

Med utgangspunkt i læreplanen i matematematikk fellesfag (Utdanningsdirektoratet, 2013) og dei grunnleggjande ferdigheitene som er skildra der er spesielt punkta «å kunne lese» og «å kunne rekne» relevante når ein arbeidar med likskapsteiknet. Å kunne lese i matematikk vektlegg det å forstå og bruke symbolspråk, medan å rekne i matematikk har med det å kunne bruke symbolspråk. Desse ferdigheitene ligg tett opp til Niss og Jensen (2002) sin symbol- og formalitetskompetanse som omhandlar avkoding, omsetjing og behandling av symbol- og formelspråk. Også Kilpatrick et al. (2001) sine trådar forståing og strategisk kompetanse som går på forståing av matematiske konsept, operasjonar og relasjonar, og å kunne løyse matematiske problem kan ferdigheitene knytast opp mot.

Korleis ein forstår likskapsteiknet bygger mykje på dei matematiske kompetansane ein har i grunn. Ei tilstrekkeleg og korrekt forståing vil bygge på det at ein kan avkode symbolet = slik at den forståinga ein har av teiknet vil vere gjeldande i alle dei matematiske situasjonane ein treff på. For at likskapsteiknet skal gi meining må det bli tolka og den lærande som møter teiknet må sjølv konstruere den matematiske tydinga av det (Darr, 2003, s. 4). Korleis ein tolkar og kor godt ein forstår likskapsteiknet matematisk vil vere avhengig av korleis den lærande har erfart likskapsteiknet og likningar tidlegare (Darr, 2003, s. 4). Det er fleire av dei kompetansane Niss og Jensen (2002) skildrar som vil vere viktige for å oppnå ei god forståing av likskapsteiknet og å kunne nytte det på rett måte. Symbol- og formalitetskompetansen skil seg ut i og med at å forstå likskapsteiknet bygg på avkodinga og innsikt i dei reglane som likskapsteiknet representerer. Utan ei korrekt forståing vil ein heller ikkje kunne utnytte dei andre kompetansane til sitt fulle. Ein vil, som følgje av manglande forståing, få ein mangelfull problembehandlingskompetanse fordi ein vil få problem med å løyse ulike matematiske problem.

Kieran (1981, s. 317) skriv at likskapsteiknet ikkje alltid vert tolka som ekvivalens av den lærande, og det kan verke som at ekvivalenstolkinga av likskapsteiknet ikkje kjem lett eller raskt på plass hos mange elevar. McNeil et al. (2006, s. 367-368) skriv også at mange elevar i staden for å tolke likskapsteiknet som eit relasjonssymbol for matematisk ekvivalens, tolkar likskapsteiknet som et operasjonelt symbol som betyr å «finne totalen» eller «skriv svaret». Dette finn ein att hos McNeil og Alibali (2005a, s. 286) som seier at i amerikanske matematikktimar er det sjeldan fokus på meininga med likskapsteiknet. Derfor må elevar konstruere tolkinga si av teiknet basert på sine eigne erfaringar med det. Dei erfaringane elevar på barnetrinnet har med likskapsteiknet er ofte oppgåver der det er ein operasjon på venstre side av likskapsteiknet og ei tom høgreside, som for eksempel $3 + 5 =$ og $9 - 3 + 1 =$ (McNeil et al., 2006, s. 368). For å løyse slike oppgåver treng dei ikkje å forstå likskapsteiknet som eit symbol for ekvivalens, dei treng bere å nytte det operasjonelt til å skrive svaret bak. Dette kan vidare føre til at dei koplar likskapsteiknet saman med slike aritmetiske operasjonar der ekvivalenstolkinga ikkje er vesentleg (McNeil et al., 2006, s. 368-369). Desse erfaringane er det som igjen gjer at mange elevar på barnetrinnet tolkar likskapsteiknet som ein operator (McNeil & Alibali, 2005a, s. 286). For hindre at elevane berre har operasjonelle erfaringar med likskapsteiknet kan det derfor synast viktig at ein i undervisninga presenterer likskapsteiknet i mange ulike situasjonar, og spesielt situasjonar der det ikkje kan tolkast som ein operator (McNeil & Alibali, 2005a, s. 304).

McNeil et al. (2006, s. 369) seier at dersom vanskar rundt forståing av likskapsteiknet kjem av dei tidlegare erfaringane med aritmetikk, kan det vere at elevar si evne til å oppnå ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet kjem an på læringskonteksten. Om dette er tilfelle kan lærarar utvide læringskontekstane til å innehalde situasjonar der ekvivalensforståinga vert fremma (McNeil et al., 2006, s. 369). Dette kan vi også sjå att i forskinga til Falkner, Levi og Carpenter (1999). Deira artikkel tek utgangspunkt i forsking på elevar i første og andre klasse si forståing av likskapsteiknet og ekvivalens. Utgangspunktet er at dei fleste elevar tolkar likskapsteiknet som eit symbol for å rekne ut og ikkje som eit teikn for ekvivalens. Dei finn ein indikasjon på at elevane gjennom diskusjon har lært å sjå likskapsteiknet som eit symbol for ein relasjon heller enn som eit symbol for «rekn ut» (Falkner et al., 1999, s. 236). Forskinga til Falkner et al. (1999), McNeil et al. (2006) og McNeil og Alibali (2005a) peikar alle i same retning, nemleg at fleire elevar har ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, men at med riktig undervisning kan dei utvikle ei forståing av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

Det er naturlegvis samanheng mellom korleis ein tolkar og korleis ein forstår likskapsteiknet. Ut frå forskinga på feltet kan ein sjå fleire tolkingar og korleis likskapsteiknet blir brukt. Eg har tatt fram to av desse som er dei som går mest igjen i forskinga.

1. Likskapsteiknet som operator - Likskapsteiknet betyr å finne svaret og er nytta som eit rekneteikn.
2. Likskapsteiknet som ekvivalensteikn – Uttrykka på begge sider har same verdi.

Jamfør ovannemnde forskingsartiklar (Falkner et al., 1999; Kieran, 1981; McNeil & Alibali, 2005a; McNeil et al., 2006) visast det at ofte nyttar elevar tolking nummer ein og dei kan ha vanskar med, eller streve med å forstå tolking nummer to.

Likskapsteiknet som operator

Dersom ein elev ser på likskapsteiknet som ein operator, har ikkje eleven ei fullverdig forståing av kva likskapsteiknet faktisk står for. Truleg har ikkje eleven utvikla nok kompetanse på området. Spesielt vitnar dette om mangel på symbol- og formalitetskompetanse, då dei ikkje avkodar likskapsteiknet på ønska måte og dermed vil dette påverke korleis dei behandlar likskapsteiknet. Eleven vil kunne gjere seg nytte av den operasjonelle tolkinga når han møter oppgåver på forma $a + b = c$, som legg opp til at ein kan tolke likskapsteiknet som ein operator, men den vil vere lite nyttig når han møter oppgåver som ikkje er på denne forma. Ei operasjonell forståing av likskapsteiknet kan medføre ei instrumentell forståing av likskapsteiknet sidan ein med ei operasjonell forståing ikkje forstår kva som er grunnlaget for at ein kan skrivet svaret på høgre side når det er ein operasjon på venstre side. Eleven vil med operasjonell og instrumentell forståing kunne kjenne på meistring og suksess slik som Skemp (2006) skriv, slik at eleven kan føle at han har ei forståing som gir meining. Somme gonger kan det vere tilstrekkeleg å forstå likskapsteiknet på denne måten, men som Kieran (1981, s. 321) også påpeikar, kan den vere avgrensande sidan ein då kan bli låst til oppgåver som inneheld ein operasjon på venstresida og eit svar på høgresida. Dette kan ein knyte til det som Skemp (2006) skriv om at ein med instrumentell forståing vil vere avhengig av hjelp når ein møter andre typar oppgåver, og dermed vil ein ikkje kunne på eiga hand utvikle kompetansen og ferdigheitene sine. Ein skjøner ikkje likskapsteiknet si rekkevidde og har underutvikla tankegangskompetanse ut frå Niss og Jensen (2002) si skildring. Dette kan også føre til at fleire elevar strevar med matematikk dei møter i vidare skulegang.

Likskapsteiknet som ekvivalensteikn

Om eleven derimot ser på likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn kan det vere ein indikasjon på at eleven har fått utvikla ferdigheitene og ein har meir kompetanse på området enn om ein berre forstår likskapsteiknet som ein operator. Ein forstår at det symboliserer ekvivalensrelasjonen og ikkje er eit teikn for å utføre noko. Tankegangskompetansen er viktig for ei ekvivalensforståing då den bidreg til å sjå ekvivalensomgrepet si rekkevidde. Det at eleven tolkar og forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn kan vere ein viktig faktor i ei relasjonell forståing av likskapsteiknet. Med ei relasjonell forståing kan ein greie å ta fatt på nye oppgåver på eiga hand slik Skemp (2006) skriv. Viktig for ei relasjonelle forståinga av likskapsteiknet er symbol- og formalitetskompetansen og kommunikasjonskompetansen, for dei legg til grunn at ein skal kunne avkode og bruke symbol og formlar og ein skal kunne tolke matematiske utsegn og tekstar. Kan ein avkode likskapsteiknet riktig i ulike situasjonar kan dette vere teikn på at elevane kan handtere det matematiske språket og har ein godt utvikla symbol- og formalitetskompetanse. Dette kan igjen vere ein indikator på at ein har ei relasjonell forståing av likskapsteiknet fordi ein har då utvikla skjema sitt så mykje at ein ser samanhengane mellom det som står på dei ulike sidene. Det er likevel ikkje slik at det å forstå at likskapsteiknet uttrykker ein ekvivalensrelasjon er einstydande med at ein har ei relasjonell forståing av likskapsteiknet.

I tillegg til utvikling av andre kompetansar og tidlegare læringskontekstar kan også eleven si kognitive utvikling vere avgjerande. McNeil et al. (2006, s. 368) seier ein kanskje kan anta at elevar vil nærme seg ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet når dei er ferdig med barneskulen. Dette er fordi elevar på ungdomstrinnet har utvikla fleire av dei generelle kognitive strukturane som er nødvendige for å lære matematikk på høgare nivå. McNeil et al. (2006, s. 368) referer til Piaget og kollegaer som hevdar at barn i aldersspennet 11-14 har utvikla dei logiske strukturane som er nødvendige for å koordinere relasjonar bygd på ekvivalens. Dermed kjem dei fram til at om ein ser det frå eit utviklingsperspektiv vil det vere meir sannsynleg at elevar ungdomstrinnet har ekvivalensforståing av likskapsteiknet, og elevar på mellomtrinnet enda ikkje er kome langt nok i utviklinga si til å forstå det. Likevel finn andre studiar (Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter, Franke & Levi, 2003) at alder og kognitiv modning aleine ikkje er ansvarleg for at elevar forstår likskapsteiknet som ein operator. I desse studiene kjem det fram at om elevar, også dei yngste, blir presentert for likskapsteiknet i utradisjonelle samanhengar og får erfare eigenskapane til likskapsteiknet, kan dei forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

Meir mellom linjene

Sjølv om ein kan dele inn forståinga av likskapsteiknet inn i to kategoriar slik eg har gjort, seier Rittle-Johnson, Matthews, Taylor og McEldoon (2011, s. 13) at å dele inn forståinga av likskapsteiknet som anten operator eller ekvivalensteikn er veldig forenkla. I si studie utvikla dei eit rammeverk som nyttar seg av likskapsteiknet for å kunne avdekke systematiske endringar i barn si forståing av likskap på tvers av barneskuletrinna. Rammeverket representerer kontinuumet av kunnskap og forståing rundt likskapsteiknet som dei antek at elevane må gå gjennom for å nå den ønska forståinga (Rittle-Johnson et al., 2011, s. 3).

Table 1
Construct Map for Mathematical Equivalence Knowledge

Level	Description	Core equation structures
Level 4: Comparative relational	Successfully solve and evaluate equations by comparing the expressions on the two sides of the equal sign, including using compensatory strategies and recognizing that performing the same operations on both sides maintains equivalence. Recognize relational definition of equal sign as the best definition.	Operations on both sides with multidigit numbers or multiple instances of a variable
Level 3: Basic relational	Successfully solve, evaluate, and encode equation structures with operations on both sides of the equal sign. Recognize *and generate* a relational definition of the equal sign.	Operations on both sides, e.g.: $a + b = c + d$ $a + b - c = d + e$
Level 2: Flexible operational	Successfully solve, evaluate, and encode atypical equation structures that remain compatible with an operational view of the equal sign.	Operations on right: $c = a + b$ or No operations: $a = a$
Level 1: Rigid operational	Only successful with equations with an operations-equals-answer structure, including solving, evaluating, and encoding equations with this structure. Define the equal sign operationally.	Operations on left: $a + b = c$ (including when blank is before the equal sign)

Note. Italics indicate an idea that may need to be revised, based on the current data.

Tabell 1 - Tabell av Rittle-Johnson et al. (2011, s. 3) sitt rammeverk.

Tabellen viser enklare kunnskap og forståing i botn og meir avansert i toppen. Sjølv om tabellen er delt inn i fire nivå seier Rittle-Johnson et al. (2011, s. 3) at ein ikkje må tolke dei som spesifikke trinn sidan det er ein kontinuerleg modell.

Dei fire nivåa skil mellom dei ulike typane likningar som elevar greier å løyse. På nivå éin, som eg har omsett til *rigid operasjonell*, meistrar ein likningar av typen «operasjon er lik svar» , $a + b = c$. Dei som er innafor dette nivået vil definere likskapsteiknet som operator. Andre nivå, *fleksibel operasjonell*, omfattar i tillegg likningar med operasjonen på høgre side eller ingen operasjonar. På dette nivået vil ein også definere likskapsteiknet som ein operator. Det tredje nivået, *grunnleggjande relasjonsforståing*, omfattar det å kunne handtere likningar som inneheld operasjonar på begge sider. På dette nivået vil ein også vere om ein kan kjenne att og kanskje kome med ein relasjonsdefinisjon, ekvivalensdefinisjon, på likskapsteiknet. Det siste nivået, *komparativ relasjonsforståing*, omfattar det same som tredje nivå, men med større tal. Ein kan også samanlikne uttrykka på begge sider av likskapsteiknet, og skjøne at om ein gjennomfører dei same operasjonane på begge sider av likskapsteiknet vil likskapen vere oppretthaldt. Det at ein kan velje ut ein ekvivalensdefinisjon av likskapsteiknet som den beste definisjonen er også teikn på at ein er på fjerde nivå.

Rittle-Johnson et al. (2011, s. 13) peikar på at det kan verke som om det tek lenger tid å utvikle ei forståing av likskapsteiknet som ekvivalensteikn enn det tek å oppnå evna til å løyse eller evaluere likningar med operasjonar på kvar side.

2.3.2 Kompetansemål i læreplanen (LK06) knytt til likskapsteiknet

I læreplanen etter kunnskapsløftet (LK06) er det delt inn i kompetansemål etter fleire årssteg i tillegg til kompetansemål etter ulike matematikkfag på vg1. Desse kompetansemåla fortel oss noko om kva elevane skal kunne etter å ha fullført desse årsstega. I denne oppgåva vil eg sjå nærmare på kompetansemåla etter 4. og 7. årssteget. Før eg gjer det vil eg ta ein rask kikk på eine kompetansemålet som står oppført etter 2. årssteget. Her står det nemleg at eleven skal kunne «gjere overslag over mengder, telje opp, samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Spesielt det siste i dette målet, **samanlikne tal og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar,** kan knytast opp mot forståinga av likskapsteiknet. I dette vil eg legge at dei skal kunne setje talstorleikar opp mot kvarandre og kunne vurdere dei, gjerne også om ein kan setje likskapsteikn mellom dei eller ikkje. Eit eksempel vil vere at ein forstår at $2 + 3 = 4 + 1$ eller $10 - 3 = 3 + 4$. Dersom elevane forstår dette vil det då vere implisitt at dei har forstått kva ekvivalens er og at likskapsteiknet vert nytta som eit symbol for denne relasjonen.

Etter 4. årssteget skal elevane kunne «beskrive og bruke plassverdisystemet for dei heile tala, bruke positive og negative heile tal, enkle brøkar og desimaltal i praktiske samanhengar og uttrykkje talstorleikar på varierte måtar» (Utdanningsdirektoratet, 2013) og dei skal kunne «bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Igjen kjem **uttrykkje talstorleikar på varierte måtar** opp som ein del av kompetansemålet, og ein kan også her seie at det vil då vere ein føresetnad at elevane har ei forståing av ekvivalens og likskapsteiknet som eit symbol for det.

I kompetansemåla etter 7. årssteget er det eit punkt som utmerkar seg, og det er at elevane skal kunne «stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Etter 7. årssteget er det ikkje nemnt noko om å samanlikne tal eller uttrykkje talstorleikar på varierte måtar. Dette tolkar eg som at dette er gitt at dei kan frå før, i og med at dei har med punktet om likningsløysing. Likningsløysing av varierte oppgåver krev at ein har ei forståing av ekvivalens og likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

2.3.3 Utfordringar med likskapsteiknet

Misbruk av likskapsteiknet

Ei utfordring med bruken av likskapsteiknet er korleis dei bruker det når dei skriv matematikk. Elevar kan la uttrykk overlappe i kvarande og Hana (2013, s. 167) skriv at det er ofte dette hender i samband med likskapsteiknet. Han skriv at når det er behov for å gjere fleire rekneoperasjonar etter kvarande vil det vere naturleg å skrive det ned slik som ein tenker. Hana (2013, s. 167) viser til eit eksempel henta frå eit eksamenssvar: $3^2 = 9 - 1 = \frac{8}{4} = 2$. Han seier videre at det er enkelt å sjå korleis eleven har tenkt, og det er riktig det han gjer her, men måten det er skrive ned på er ikkje korrekt. Her vert likskapsteiknet misbrukt fordi det vert nytta når sidene er ulike. Det er viktig at ein skriv matematisk notasjon riktig fordi ei av styrkane til det matematiske symbolspråket er at ein kan nytte reglane til sjekke om ein har rekna riktig (Hana, 2013, s. 167).

McNeil og Alibali (2000, s. 738) skildrar i si forsking ukorrekte strategiar for løysing av matematikkproblem på forma $a + b + c = d + \_$. Den første er «Legg saman alle»-strategien, der ein adderer alle tala i problemet uavhengig av plasseringa av likskapsteiknet. Ein slik strategi vil kunne sjåast i samanheng med ei operasjonell forståing av likskapsteiknet sidan ein ikkje tek til etterretning kva likskapsteiknet symboliserer i uttrykket. Ein anna strategi er «Legg saman fram til likskapsteiknet» der ein adderer tala som står på venstre side av likskapsteiknet og ikkje tenker på talet på høgre side. Igjen er dette ein strategi som bygger på ein operasjonell forståing av likskapsteiknet i det at ein kanskje er kjend med matematiske uttrykk der det berre er operasjonar på venstre side av likskapsteiknet, og dermed forstår «er lik» som «rekn ut».

Forståing av likskap

Falkner et al. (1999, s. 234) skriv at barn må forstå at likskap er ein relasjon som uttrykker at to matematiske uttrykk har den same verdien, og at det er to grunnar til at dette er viktig. Den første seier dei er at barn treng å forstå likskap for å kunne reflektere rundt relasjonar uttrykt gjennom talsetningar. For eksempel talsetninga $7 + 8 = 7 + 7 + 1$, om barn forstår denne relasjonen og likskap vil dei kunne representere aritmetiske idear på ulike måtar, og kunne kommunisere og reflektere rundt desse ideane. Dette vil gi dei moglegheit til å overføre matematiske prinsipp til vanskelegare problem (Falkner et al., 1999, s. 234). Falkner et al. (1999, s.234) refererer til Kieran (1981) og Matz (1982) når dei skriv om den andre grunnen til å forstå likskap som ein relasjon og seier at om ein ikkje forstår det vil det vere eit stort hinder når elevane skal gå frå aritmetikk til algebra. Eit eksempel som blir trekt fram er forståinga av å utføre like operasjonar på kvar side av likskapsteiknet og at det opprettheld likskapen. Falkner et al. (1999, s.234) tenker med dette til grunn på dei elevane som forstår likskapsteiknet som ein operator. Desse vil ha langt mindre sjanse til å forstår kvifor ein kan gjennomføre like operasjonar på begge sider av likskapsteiknet og vil også ha problem med å overføre det til nye område (Falkner et al., 1999, s.234).

Om vi ser tilbake på resultata frå TIMSS og kommentaren frå Grønmo et al. (2017) om elevars prestasjon i algebra kan vi merke oss den andre grunnen til Falkner et al. (1999). Manglande forståing av likskap som ein relasjon vil vanskeleggjer overgangen frå aritmetikk til algebra. Det er derfor nærliggande å tru at manglande forståing av likskap kan vere ein av grunnane til at elevane skårar så lågt innan algebra.

2.3.4 Lærarar si forståing og undervisning av likskap og likskapsteiknet

Som presentert hittil i oppgåva er det ein del forsking som er gjort på elevar si forståing av likskap og likskapsteiknet. Det føreligg mindre forsking på lærarar si forståing av dette (Vermeulen & Meyer, 2017, s. 136). Fitzmaurice, O'Meara, Johnson og Lacey (2018) har studert lærarstudentar si forståing av elementær algebra og korleis dei løyser ei lineær likning før og etter ein workshop for å forstå matematikk. Dei konkluderer med at ein må bruke meir tid på å utvikle lærarstudentar si relasjonelle forståing, då fleire av dei kunne løyse likningar utan problem, men dei forstod ikkje mekanikken bak det (Fitzmaurice et al., 2018, s. 379). Vermeulen og Meyer (2017) har sett på kva misoppfatningar elevar i sjette klasse i Sør-Afrika har i samband med likskapsteiknet. Dei har også då sett på korleis lærarar i femte og sjette kasse i Sør-Afrika forstår likskapsteiknet, og korleis det kan påverke elevar sine misoppfatningar om likskapsteiknet. Dei fann at lærarane visste at likskapsteiknet var eit ekvivalensteikn, men at dei gjerne ikkje understreka dette i undervisninga si. Lærarane sa også at dei hadde observert elevane sine vise ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, men dei hadde ikkje innsett viktigheita av riktig oppfatning av likskapsteiknet for vidare arbeid i matematikk (Vermeulen & Meyer, 2017, s. 144). Det vart også avdekka at lærarane mangla strategiar for å redusere misoppfatningar av likskapsteiknet. Vermeulen og Meyer (2017) har sett funna opp mot Ball et al. (2008) sin teori om matematisk kunnskap for undervisning. Dei fann at lærarane hadde mangelfull kunnskap for undervisning når det gjaldt likskapsteiknet og dette kunne vere med på å fremje misoppfatningar hos elevane.

Eit anna punkt ein kan trekke fram når ein ser på undervisninga til lærarane er korleis dei eksponerer elevane sine for likskapsteiknet. Fleire forskarar (m.a. Baroody & Ginsburg, 1983; McNeil & Alibali, 2005b) har argumentert for at grunnen til at mange elevar forstår likskapsteiknet som ein operator er at elevane ofte blir eksponert for oppgåver og eksempel der det ikkje er nødvendig å tolke likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Dette vil for eksempel vere likningar som Rittle-Johnson et al. (2011) viser til på nivå éin og nivå to. Om ein ikkje vert presenter for andre typar samanhengar der likskapsteiknet må tolkast som eit ekvivalensteikn vil ein heller ikkje skjøne dette når ein møter andre typar likningar. For eksempel likningar som dei Rittle-Johnson et al. (2011) skildrar i sine nivå tre og fire. Dette kan ein sjå i samanheng med det som Darr (2003) skriv om at forståinga og tolkinga av likskapsteiknet og likskap er avhengige av kva erfaringar dei har med det frå før. Han seier også at det verkar som om at mange elevar på småtrinnet og mellomtrinnet ikkje har hatt erfaringar som har gitt dei ei brei forståing av kva likskapsteiknet tyder. Kalkulatoren, eit mykje brukt verktøy i matematikkfaget, kan vere med på å styrke forståinga av likskapsteiknet som ein operator eller eit symbol for «rekn ut» sidan ein trykk på «er lik»-tasten for å få «svaret» (Darr, 2003, s. 5). For å unngå at elevane berre erfarer likskapsteiknet i situasjonar der det kan tolkast som ein operator er det viktig at lærarane varierer korleis likningar er representert (Darr, 2003, s. 6). Darr (2003, s. 6) viser til at ein kan byte frå likningar med operasjon på venstre side til likningar med operasjon på høgresida. Han seier videre at berre eit så enkelt grep kan føre til store diskusjonar då ein må rekne med at det ikkje er alle elevar som vil godta at ein snur på det på denne måten.

Når ein snakkar om korleis elevar vert eksponert for likskapsteiknet i undervisninga vil det vere grunn til å nemne lærebøkene som ein del av dette. Lærebøker bidreg til å definere fag slik elevar opplev dei og omset det som er bestemt politisk i eit land at dei skal lære, til eit representasjonar som elevane forstår (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang, 2002). Lærebøkene er med på å knyte saman målet med opplæringa og undervisninga, og dermed kan den i stor grad påverke kva som skjer i undervisninga (Valverde et al., 2002, s. 2). Innhaldet i lærebøkene bli dermed viktig i korleis elevane blir eksponert for faget. Ser vi mot lærebøkene som ein del av undervisninga så vil dei står for mykje av elevane sine erfaringar med likskapsteiknet. Dersom lærebøkene berre legg opp til oppgåver der likskapsteiknet kan tolkast som ein operator vil elevane i langt større grad bli eksponert for likskapsteiknet i slike situasjonar og det kan vere ein medverkande faktor til at elevar utviklar ei operasjonell forståing. Lærarar bør vete i kva grad oppgåvene i lærebøkene legg til rette for ulike erfaringar av likskapsteiknet, slik at dei er bevisste i korleis dei nyttar læreboka som ein ressurs for å utvikle elevane si forståing av likskapsteiknet.

Darr (2003) har sett på korleis lærarar kan hjelpe elevane til å utvikle ei breiare matematisk forståing av kva «er lik» tyder. Han seier at det i følgje litteraturen ikkje er tilstrekkeleg å forklare til elevane kva teiknet tyder. Falkner et al. (1999, s. 233) skriv at lærarar må tenke på elevar si oppfatning av likskap med ein gong ein introduserer rekneteikna. Om ein ikkje gjer det, kan ein risikere at misoppfatningar om likskap kan få større fotfeste (Falkner et al., 1999, s. 233). Darr (2003, s. 5) peikar på det å vere bevisst kommunikasjonen med elevane, for å sikre at ein har lik oppfatning, kanskje kan vere sentralt i arbeidet med å få utvikla elevane si forståing. Lærarane må samtale med elevane slik at ein i fellesskap kan konstruere og diskutere dei ulike meiningane.

Det å samtale om likskapsteiknet og utforske det seier Darr (2003, s. 6) kan vere ein måte å arbeide med og utvide forståinga av det. Også samtale om ulike likningar, kva det er ein ønsker å finne i ei likning og kva eigenskapar ein finn i symbola i likninga vil vere nyttig her. Modellar knytt til balanse kan vere eit nyttig verktøy i dette arbeidet (Darr, 2003, s. 6), for eksempel modellering av ei likning ved bruk av ei skålvekt. Tanken om samtale for å utvide forståinga kan ein knyte opp mot den proksimale utviklingssona som Vygotskij (1978) skildrar. Han definerer den proksimale utviklingssona som «the distance between the actual developmental level as determines by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers» (Vygotskij, 1978, s. 86). Ein kan sei at den proksimale utviklingssona er området der elevar kan lære og utvikle seg med støtte frå andre. Den aktuelle og den proksimale utviklingssona vil stadig vere i endring då dei heile tida utvidast ved at ein lærer nye ting. Lærarar bør sørge for at elevar får arbeide i den proksimale utviklingssona i undervisninga slik at læring kan skje. I samband med likskapsteiknet bør elevane arbeide i den proksimale utviklingssona slik at dei kan utvide forståinga av det og dermed vidare kunne nytte det i fleire situasjonar enn før.

For å rette opp i misbruk av likskapsteiknet bør ein ta tak i dei situasjonane tidleg, og om mogleg gjere eit eksempel av det slik at det kan bidra til meir læring. Darr (2003, s. 6) viser til at likskapsteiknet kan bli nytta som ei lenke mellom operasjonar, likt det som Hana (2013) skildrar om at elevar kan la uttrykk overlappe kvarandre. For eksempel $3 + 7 = 10 \div 2 = 5$. Ein bør gripe moglegheita til å snakke og forklare om korleis ein kan nytte andre symbol for å symbolisere at utrekningar heng saman, som for eksempel ei pil seier Darr (2003, s. 6).

3 Metode

I dette kapitelet vil eg skildre korleis datainnsamlinga og analysearbeidet vart gjennomført. Eg vil gjere greie for kva val eg har tatt sett opp i mot dette arbeidet for å best mogleg svare på forskingsspørsmålet mitt som er: *Korleis forstår nokre elevar frå mellomtrinnet og ungdomstrinnet likskapsteiknet?* Først vil eg seie noko om kva forskingsdesign eg har valt og litt om kva kvalitative metodar inneber. Deretter ser eg på datainnsamlinga, korleis utvalet blei valt ut og kva oppgåver som vart nytta i denne. Eg har eit delkapittel der eg går gjennom gjennomføringa av analysen og rammeverka nytta til den. Til slutt vil eg sjå på reliabiliteten og validiteten til forskingsarbeidet, kva fordelar og avgrensingar det har, og kva etiske omsyn som måtte takast.

3.1 Forskingsdesign

På grunn av tidsavgrensinga til masteroppgåva var det naudsynt å velje eit forskingsdesign som gjorde det mogleg å kome i mål. Med utgangspunkt i forskingsspørsmålet mitt og det tidsaspektet eg hadde til rådigheit såg eg at eit kvalitativt forskingsdesign ville vere det som eigna seg best. Kvalitative studiar er retta mot at vi utviklar ei forståing av dei sosiale fenomena vi studerer. Dette gjeld både med studiar basert på arbeid i felten og analyser av tidlegare etablert data (Thagaard, 2018, s. 16).

For å svare på forskingsspørsmålet fekk eg moglegheit til nytte meg av data som allereie eksisterer. Det er derfor viktig å presisere at metodedesignet som er nytta i datainnsamlinga ikkje er mitt eige. Dette er data som er samla inn i samband med eit prosjekt som er inspirert av, og samla inn i etterkant av SPEED-prosjektet (Haug, 2017). SPEED-prosjektet (Haug, 2017) er eit forskingsprosjekt som vart gjennomført som eit samarbeid mellom Høgskulen i Volda og Høgskulen i Innlandet. I etterkant av SPEED-prosjektet (Haug, 2017) gjennomførte tre tilsette ved Høgskulen i Volda oppgåvebaserte intervju med oppgåver henta frå SPEED-prosjektet (Haug, 2017). Desse oppgåvene var valt ut med tanke på å sjå nærmare på elevars forståing av ulike emne, der eit av emna var likskapsteiknet. Desse intervjua var ferdig transkriberte og eg fekk tilgang til desse for å gjennomføre forskinga mi. I følgje Kvale og Brinkmann (2015, s. 42) er eit av føremåla ved kvalitative forskingsintervju å forstå sider ved intervjupersonen frå deira perspektiv og derfor kan intervjua som vart gjennomført bli sett på som kvalitative forskingsintervju.

I intervjuguiden frå datainnsamlinga kjem det fram at elevane som vart intervjua fekk eit av tre sett med matematikkoppgåver som skal løysast. Elevane fekk gitt ei og ei oppgåve, og etter å ha løyst første oppgåva samtala forskar og elev om oppgåveløysinga.

Av dei tre setta med matematikkoppgåver som var utgangspunkt for intervjua var det oppgåvesett 2 som ville vere relevant for denne oppgåva. Oppgåvesettet kan sjåast i vedlegg 1. Dette settet inneheld oppgåver som kan fortelje oss noko om elevane si forståing av likskapsteiknet og likskap, og derfor ville eg analysere dei intervjua som var gjort med dette settet.

I analysen ønska eg sjå på korleis elevane løyste oppgåvene, og deretter brukte eg tid på å tolke det dei tenkte ut frå samtalen etter oppgåvene. Dette for å kunne seie noko om kva forståing dei har. For å svare på forskingsspørsmålet måtte eg seie noko spesifikt om korleis dei ulike elevane forstår likskapsteiknet. Eg valde i stor grad å nytte meg av det rammeverket som Rittle-Johnson et al. (2011) utvikla til sitt studie og ut frå det diskutere vidare rundt elevane si forståing. Det gav med punkt eg såg etter i intervjua for å kunne seie noko om elevane si forståing. I tillegg laga eg meg eit rammeverk bygd på Skemp (2006) sine definisjonar av instrumentell og relasjonell forståing for å kunne seie noko om dette i analysen.

3.1.1 Kvalitative metodar, fenomenologi og hermeneutikk

Kvalitative forskingsmetodar søker å forstå det vi studerer, og som Befring (2015, s. 109) påpeikar så eignar dei seg når målsettinga er å få innsikt i barn og unge sine opplevingar av seg sjølv og sitt kvardagsliv. Sentralt i kvalitativ metodelære er innsamling, analyse og tolking av forskingsdata som bygger på ulike formar for sjølvrapport, og dei kvalitative analysane har forankring i fenomenologiske og hermeneutiske fagtradisjonar (Befring, 2015, s.109). Denne oppgåva vil gjennom den kvalitative framgangsmåten som er nytta ha forankring i fenomenologisk og hermeneutisk tilnærming.

I følgje Kvale og Brinkmann (2015, s. 45) er fenomenologi, når det er snakk om kvalitativ forsking, eit omgrep som omhandlar ei interesse for å forstå sosiale fenomen ut frå aktørane sine eigne perspektiv. Ein ønsker å skildre verda slik informantane opplev den og ein baserer seg på at den sanne verkelegheita er den menneske oppfattar (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 45). Thagaard (2018, s. 36) skriv at fenomenologien tek utgangspunkt i den subjektive opplevinga og søker å oppnå ei forståing av meininga i erfaringane til enkeltpersonar. I ei fenomenologisk tilnærming må forskaren vere open for erfaringane til dei personane som ein studerer og ein utforskar meiningane personane tillegg erfaringane sine av eit fenomen (Thagaard, 2018, s. 36).

Hermeneutikk er eit omgrep avleia av det greske ordet *hermenvein*, som tyder «tolke for å forstå» (Befring, 2015, s. 20). Hermeneutisk metode går tilbake til Gadamer (1900-2002) som skildra det som seinare har blitt kalla den hermeneutiske sirkel (Befring, 2015, s. 21). Det startar med ei før-forståing, med fagleg relevant innsikt og fordommar, som vidareutviklast gjennom tolking av innhenta erfaringar, og som gir ei utvida forståing (Befring, 2015, s. 21). I dag skildrar ein hermeneutisk metode som ein «subjektivt fortolkende prosess, som suksessivt kan bidra til økt forståelse av en tekst.» (Befring, 2015, s. 20-21).

3.1.2 Oppgåvebasert intervju

Føremålet med kvalitative forskingsintervju er å forstå sider ved intervjupersonen sitt daglegliv frå deira eige perspektiv (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 22). Eit intervju er ein samtale som har ein viss struktur og ei viss hensikt, og forskingsintervjuet går djupare enn den spontane meiningsutvekslinga som er kvardagsleg. Forskingsintervjuet er ikkje ein likeverdig konversasjon sidan forskaren definerer og kontrollerer samtalen, og han har satt temaet for intervjuet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 22).

Kvalitative forskingsintervju har ein lang tradisjon som ein vanleg forskingsmetode og eit nyttig verktøy innan forsking i pedagogikkfaga (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 28). Den type kvalitative intervju som ofte er nytta i kvalitative studiar er det vi kallar delvis strukturerte intervju (Thagaard, 2018, s. 91). Eit delvis strukturert intervju kan skildrast ved at ein har ein intervjuguide, men ein er ikkje låst til å følgje den slavisk. Delvis strukturerte intervju kan i større grad enn strukturerte intervju utnytte kunnskapspotensialet i dialogane ved at ein kan vike frå spørsmåla for å gå djupare inn i det ein som forskar finn interessant (Brinkmann, 2014, s. 286).

I datainnsamlinga som er nytta i denne oppgåva har forskarane nytta seg av oppgåvabaserte intervju. Oppgåvebaserte intervju er eit viktig verktøy både i forsking og i arbeid med evaluering (Goldin, 1997, s. 41). Desse intervjua opnar moglegheitene for å få tak i informasjon om elevane som er tett knytt til det som er måla i klasseromsundervisninga (Goldin, 1997, s. 41). Det oppgåvebaserte intervjuet vil eg legge inn under kategorien delvis strukturerte intervju, sidan ein har ein struktur i oppgåvene som ein går gjennom og samtalar om. Gjennom intervjuet ønsker ein som sagt å få tak i informasjon som bygger på eleven sine erfaringar, og då er det mogleg at forskaren må vere aktiv for å få fram denne. Thagaard (2018, s.89) referer til Holstein og Gubrium (2016) som nyttar omgrepet aktiv intervjuing for å framheve samarbeidet mellom forskar og informant for å skape meining i informanten sine erfaringar.

Goldin (1997, s. 54) skriv at eit føremål ved kliniske oppgåvebaserte intervju i matematikk er å kunne karakterisere barn sine strategiar, kunnskapsstrukturar eller kompetansar. Vidare skriv han at det då er nødvendig å utarbeide eit teoretisk rammeverk som skildrar og karakteriserer det vi ønsker å finne ut av. Dette rammeverket må også fortelje oss om karakteristikkane til oppgåvene i det oppgåvebaserte intervjuet og korleis dei kan vere til hjelp for å finne ut av det vi søker (Goldin, 1997).

Goldin (1997, s. 61-62) skildrar fem prinsipp for forskingsdesign for oppgåvebaserte intervju i matematikk som har som mål å etablere eit best mogleg vitskapleg fundament og som skal samle mest mogleg informasjon gjennom intervjuet. Desse prinsippa, henta frå Goldin (1997, s. 61-62) og omsett av meg, er:

1. Tilgjengelegheit – Intervjuoppgåvene må vere passande for intervjuobjektet.
2. Rik representasjonsstruktur – Dei matematiske oppgåvene i intervjuet må vere mogleg å finne fleire representasjonar for oppgåvene, både symbolske og imaginære.
3. Fri problemløysing – Intervjuobjektet bør kunne nytte seg av fri problemløysing der det er mogleg, slik at ein kan observere spontan oppførsel og grunnlag for spontane val. Ein må vente med å rettleie intervjuobjektet slik at ein ikkje taper informasjon som kan vere nyttig og meiningsfull.
4. Tydlege kriterium – Store eventualitetar bør vere adressert i forskingsdesignet så tydleg som mogleg. Desse eventualitetane bør skilje mellom «riktige» og «gale» svar med strukturerte spørsmål som er designa for å gi intervjuobjektet moglegheit til å rette seg sjølv. Dette er viktig for moglegheitene for reproduksjon og generalisering av dei funna som vert gjort.
5. Interaksjon med læringsmiljøet – Ulike eksterne representasjonar bør vere tilgjengeleg slik at det tillèt interaksjon med eit rikt, observerbart lærings- eller problemløysings-miljø og dermed kan gi informasjon om den problemløysande sine interne representasjonar.

3.2 Datainnsamling

3.2.1 Utval

I kvalitative studiar har ein ofte eit relativt lite utval, og det er derfor viktig at ein nyttar seg av ei hensiktsmessig utveljing (Thagaard, 2018, s.54). I kvalitative studiar nyttar ein seg ofte av strategiske utval, der ein systematisk vel personar eller einingar som har eigenskapar eller kvalifikasjonar som er strategiske sett opp mot problemstillinga (Thagaard, 2018, s.54). I samband med den type studie som eg har henta datamaterialet mitt frå må ein hente inn samtykke og det at ein må samtykke til deltaking gjer at ein kan sjå på utvalet i denne oppgåva som eit tilgjengelegheitsutval. Tilgjengelegheitsutval har vi når rekrutteringa av deltakarar baserer seg på sjølvseleksjon (Thagaard, 2018, s. 56). Tilgjengelegheitsutval er rekna som eit strategisk utval sidan deltakarane har eigenskapar som er relevante for problemstillinga og ein vel deltakarane ut frå at dei er tilgjengelege (Thagaard, 2018, s. 56).

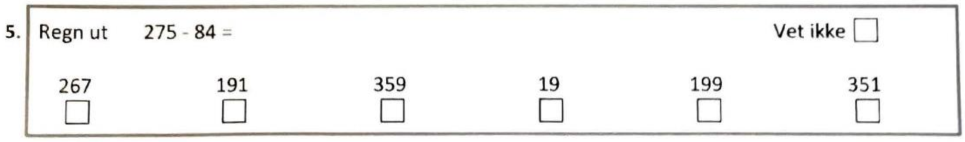
Skulane som vart plukka ut til å vere med i prosjektet vart valt utan noko spesielle kriterier anna enn at dei ikkje skulle vere for nære Høgskulen i Volda. Forskarane tok kontakt med rektorane som avklara med lærarar om det var aktuelt å delta i prosjektet. Når dei fekk tilbakemelding med skulen om at dei ønskte å delta gjekk dei vidare til elevar og føresette. Elevane og føresette fekk tilsendt informasjonsbrev og samtykkeskjema der dei også måtte krysse av om dei godkjente at intervjua kunne nyttast seinare i anna forsking ved Høgskulen i Volda, og i samband med konferansar og undervisning. Det var 24 elevar som vart intervjua i samband med datainnsamlinga, 12 frå 5. klasse og 12 frå 8. klasse. Elevane kom frå fire ulike skular og det var seks elevar frå kvar skule. Sidan eg berre skulle sjå på det eine av tre oppgåvesett, var det ikkje alle intervjua som var relevant for oppgåva. Derfor består utvalet mitt av sju elevar, der fire elevar var frå 5. klasse og tre elevar frå 8. klasse

Ein anna ting Thagaard (2018, s. 57) seier ein bør merke seg i samband med at utvalet er eit tilgjengelegheitsutval, er at dei som er villige til å delta ofte kan meistre det ein skal undersøke i større grad enn dei som ikkje ønsker å delta. Dette kan gi forskaren meir informasjon om dei som meistrar enn dei som opplever det som utfordrande og dette gir ein skeivheit i informasjonen. Når ein risikerer denne skeivheita er det viktig at ein diskuterer korleis utvalet gir grunnlag for konklusjonar som ein kjem fram til i undersøkinga (Thagaard, 2018, s. 57). I denne oppgåva kan ein risikere at forskarane som samla inn datamaterialet ikkje har fått tilgang til å intervjue alle elevane i dei ulike klassene. I tillegg vil utvalet vere avgrensa av den faktoren at dei har delt ut ulike oppgåvesett til dei som har blitt intervjua. Dette gjer at ein ville kunne fått større forståing av elevars forståing om ein hadde intervjua enda fleire med det oppgåvesettet som er relevant for denne oppgåva. Utvalet i denne oppgåva har nok ikkje nådd det «metningspunktet» som Thagaard (2018, s. 59) skildrar, men det er ikkje sikkert at det i ei masteroppgåve hadde vore mogleg å hatt eit mykje større utval. Dette med tanke på ønsket om ei kvalitativ tilnærming. Masteroppgåva er avgrensa av tidsperspektivet og ei kvalitativ studie søker å gjennomføre omfattande analyser som er tid- og ressurskrevjande (Thagaard, 2018, s.59).

3.2.2 Oppgåver

Oppgåvene som er nytta i forskingsarbeidet er henta frå eit oppfølgingsprosjekt i samband med SPEED-prosjektet (Haug, 2017). Forskarane som gjennomførte intervjua valde ut oppgåver basert på kva dei ønska å sjå nærmare på. Desse oppgåvene vart samla i tre oppgåvesett som vart gitt i intervjua. Eg vil no sjå nærmare på dei oppgåvene som eg tenker er relevante for forskingsspørsmålet i oppgåvesett 2. Eg vil vurdere korleis dei kan fortelje oss noko om forståinga til elevane og vurdere dei opp mot Goldin (1997) sine prinsipp for oppgåvebaserte intervju. Dei oppgåvene som eg fann ut at ville vere relevante for denne studien var oppgåve 5, oppgåve 21 og oppgåve 51.

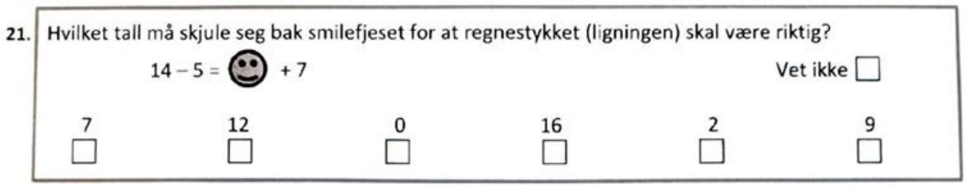
Oppgåve 5



Figur 4 - Oppgåve 5

I denne oppgåva vil eg kunne stadfeste om elevane kan tolke likskapsteiknet som ein operator der det betyr at dei skal rekne ut uttrykket på venstre side og skrive svaret på høgre side. Dersom elevane strevar med å forstå denne oppgåva vil det vere interessant å få vete meir om kva dei tenker og korleis dei tenker når dei skal løyse den. Denne oppgåva vil også kunne gje svar på om elevane ligg innan nivå éin sett ut frå rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011).

Oppgåve 21



Figur 5 - Oppgåve 21

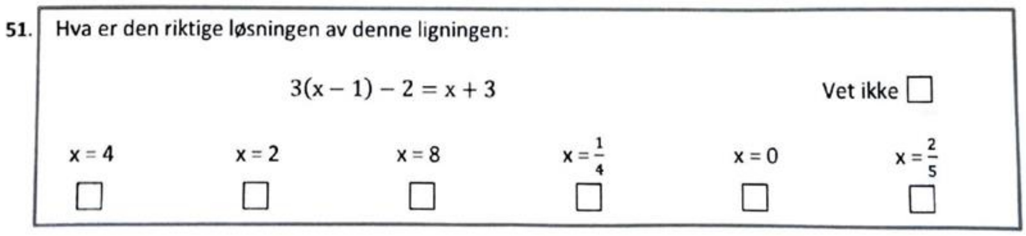
Denne oppgåva meiner eg er ei oppgåve som kan fortelje oss noko om korleis elevane forstår likskapsteiknet når dei løyser den. Gir eleven svaret 12 kan ein tenke seg at elevane har ei forståing av at likskapsteiknet er eit ekvivalensteikn, men ikkje har oppnådd relasjonell forståing av likskapsteiknet. Då kan det vere at dei tenker at likskapsteiknet forteljar at det skal vere likt på begge sider, men dei gløymer av rekneteikna på dei to ulike sidene. Svarar eleven 2, som er riktig svar, kan det tyde på at eleven tolkar likskapsteiknet som ekvivalensteikn. Viss eleven svarer 9 kan det tyde på at dei tolkar likskapsteiknet som operator, og nyttar teiknet til å rekne ut det som står framføre det og ikkje som eit ekvivalensteikn (Falkner et al., 1999; McNeil

& Alibali, 2005a). Svaret 16 vil kunne kome av strategien «legg saman alle» som gir oss $14 - 5 + 7 = 16$ slik McNeil og Alibali (2000) skildrar i si forsking der dei legg fram ukorrekte strategiar for løysing av likningar.

Ein kan ikkje trekke slutningar om elevane si forståing av likskapsteiknet berre på bakgrunn av kva svar dei gir. Derfor må ein etter eleven har svart og fått tenkt seg om stille oppfølgjande spørsmål for å få innblikk i korleis eleven har tenkt. Det er også her ein kan finne nærmare ut kvar ein kan plassere elven ut frå rammeverket og kva forståing dei faktisk har.

Goldin (1997) sitt første prinsipp er at oppgåva skal vere tilgjengeleg for elevane, det må vere mogleg for dei å løyse den med den kunnskapen dei har. Elevane som vart intervjua var elevar på mellomtrinnet og ungdomstrinnet. I læreplanen i matematikk fellesfag står det i kompetansemåla etter 7. årssteg at mål for opplæringa er at eleven skal kunne «finne informasjon i tekstar eller praktiske samanhengar, stille opp og forklare berekningar og framgangsmåtar, vurdere resultatet og presentere og diskutere løysinga» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 7). Det står også at elevane skal kunne «stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 7). Oppgåve 21 omfamnar begge desse måla og skal dermed vere tilgjengeleg for elevane i åttande klasse. Sett opp mot kompetansemåla etter 4. årssteget, der det ikkje står noko spesifikt om likningar, kan oppgåva vere mindre tilgjengeleg for femteklassingane. Den opnar for fleire representasjonar, og gir elevane litt hjelp ved at det står likning i parentes i oppgåveteksten.

Oppgåve 51


51. Hva er den riktige løsningen av denne ligningen:

$$3(x - 1) - 2 = x + 3$$

Vet ikke ☐

$x = 4$ ☐ $x = 2$ ☐ $x = 8$ ☐ $x = \frac{1}{4}$ ☐ $x = 0$ ☐ $x = \frac{2}{5}$ ☐

Figur 6 - Oppgåve 51

Oppgåve 51 er også ei oppgåve som eg meiner kan fortelje oss noko om elevane si forståing av likskapsteiknet. Oppgåva krev at elevane forstår kva likskapsteiknet symboliserer ved at dei må gjennomføre likningsløysing og eventuelt bruke «flytt og bytt»-regelen for å gjennomføre dette. Viss dei nyttar denne regelen må ein vere påpasseleg å få med seg om dei veit kvifor dei nyttar den, fordi dette kan fortelje oss noko om forståinga deira. Dette kan potensielt fortelje oss mykje om elevane forstår instrumentelt eller relasjonelt. Denne oppgåva vil vere avgjerande for å kunne seie noko om elevane er innan nivå tre eller fire sett opp mot rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011) då likninga inneheld variabelen på begge sider av likskapsteiknet.

Oppgåva skal vere tilgjengeleg for elevane med tanke på kompetansemåla etter 7. årssteg, og den gir rom for fri problemløysing slik Goldin (1997) skriv er viktig. Det er ingen avgrensingar for korleis elevane kan løyse den på papiret og den gir rom for at forskaren kan stille utfyllande spørsmål for å få tak i meir informasjon om korleis eleven tenker. Oppgåva kan vere litt vanskelegare enn den andre med tanke på representasjonar, men det kan vere mogleg å finne andre representasjonar enn den som er i oppgåva. På grunn av at denne oppgåva inneheld ei meir utfordrande likning med den ukjende representert to stader og fleire operasjonar vil eg sei at denne oppgåva ikkje eignar seg til å vurdere femteklassingane si forståing dersom dei ikkje greier å løyse oppgåve 21.

3.2.3 Gjennomføring av intervjua

Intervjua føregjekk på skulane til elevane. Intervjua vart filma slik at ein både har lyd og bilete som utgangspunkt. Forskarane valde å nytte videoopptak fordi dei rekna med at dei ville fange opp meir av forståinga til elevane ved å sjå på korleis dei skreiv ned eller viste på papir undervegs i intervjuet. Dei tok også opp lyd separat for å vere sikker på at ein kunne anonymisere intervjua, og for å sikre lydopptak av god kvalitet.

Under intervjua sat elev og intervjuar ovanfor kvarande ved eit bord. Det var to intervjuarar til stades der den eine leia intervjuet. I intervjua gav intervjuaren eleven ei oppgåve på eit ark. Eleven fekk arbeide med oppgåva så lenge han ville utan innblanding frå intervjuaren. Når eleven signaliserte at han var ferdig, ønskte hjelp eller stod fast snakka intervjuarane med eleven om korleis han hadde tenkt. Her var det viktig at intervjuaren ikkje var ledande i spørsmåla sine og gav eleven rom for å komme med sine tankar og meiningar. Slik som Goldin (1997) skriv i sine prinsipp må ein vente med å rettleie eleven slik at ein ikkje gå glipp av viktig eller nyttig informasjon. Samtalen tok for seg oppgåva og løysing av den. Etter ein var ferdig med ei oppgåve gjekk dei vidare til neste.

Elevane hadde tilgjengeleg papir og blyant slik at det hadde moglegheit for å skrive ned undervegs medan dei tenkte. Dette er i tråd med Goldin (1997) sitt tredje og femte prinsipp om fri problemløysing og interaksjon med læringsmiljøet. Elevane fekk moglegheit til å sjølv tenke og løyse oppgåva, og dei fekk moglegheit til å nytte papiret til å komme fram med sine interne representasjonar.

3.3 Analyse

Målet med analysen er å avdekke eit bodskap, ei meining eller eit mønster i datamaterialet og kunne nytte dette til å trekke ein konklusjon som skal svare på problemstillinga (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 39). Allereie når ein er ute i felt er ein i gong med analysen gjennom at vi vurderer dei observasjonane vi gjer oss, og datamaterialet vil vere prega av den forståinga som vert utvikla. (Thagaard, 2018, s. 151). I denne oppgåva hadde eg ikkje denne forutsetninga då eg nytta meg av tidlegare innsamla data. Dette stilte igjen høgare krav til at eg sette meg godt inn i intervjutranskripsjonane. Dette samsvarar med det Thagaard (2018, s.151) skildrar som første trinn i analysen der ein skal bli fortruleg med referata frå intervjua. Ein må få oversikt over innhaldet og danne seg eit inntrykk av kva datamaterialet kan fortelje oss. Dette gjorde eg ved å lytte gjennom alle intervjua samstundes som eg leste transkripsjonane. Det ville vere tenleg å først trekke fram utsnitt frå intervjua som var relevante for forskingsspørsmålet og deretter tolke og vurdere det som er ein har sett på.

For å kunne seie noko om forståinga var det naudsynt å forstå korleis elevane tolka likskapsteiknet i oppgåvene. Dei to hovudkategoriane eg satt opp var «Likskapsteiknet som ekvivalensteikn» og «Likskapsteiknet som operator». For å kunne vurdere korleis elevane tolka det måtte eg sjå etter teikn på dei ulike tolkingane i intervjua. Teikn på at elevane tolkar og forstår likskapsteiknet som ein operator er at eleven greitt kan løyse oppgåve 5. Der kan ein tolke at likskapsteiknet står for å rekne ut for å finne svaret, og elevane kan for eksempel forklare at likskapsteiknet betyr at ein skal rekne ut eller finne svaret. Derimot vil eleven kunne streve med å forstå kva han skal gjere i oppgåve 21 og oppgåve 51. Teikn på at elevane tolkar likskapsteiknet som ekvivalensteikn vil vere at dei lettare kan ta fatt på oppgåve 21 og 51 sidan dei då skjønar at det skal vere likt på begge sider. Dersom dei tolkar det som eit ekvivalensteikn ville dei også kunne forklare at likskapsteiknet tyder at det skal vere likt på begge sider. Ein viktig indikator på korleis elevane forstår likskapsteiknet er korleis dei definerer likskapsteiknet når dei vert spurt om det. Det enkle spørsmålet kunne gi meg mykje informasjon.

Eg har i analysen nytta meg av rammeverket som Rittle-Johnson et al. (2011) utvikla til si studie, dette kan ein sjå på side 19. Nivå éin og to i rammeverket, *rigid operasjonell* og *fleksibel operasjonell,* har eg plassert i hovudkategorien «Likskapsteiknet som operator». Nivå tre og fire, *grunnleggjande relasjonsforståing* og *komparativ relasjonsforståing* er plassert hovudkategorien «Likskapsteiknet som ekvivalensteikn». Under har eg satt opp ein tabell med inndelinga.

Likskapsteiknet som ekvivalensteikn	Nivå 4 – Komparativ relasjonsforståing
	Nivå 3 – Grunnleggande relasjonsforståing
Likskapsteiknet som operator	Nivå 2 – Fleksibel operasjonell
	Nivå 1 – Rigid operasjonell

Tabell 2 - Kategoriar for forståing

I analysen vurderte eg elevane sine svar og forklaringar ut frå skildringane av forståing i dei ulike nivåa i rammeverket, og prøvde å plassere kva elev inn på dei ulike nivåa. Rammeverket skildrar kva som kjenneteiknar dei ulike nivåa og kva likningsformat ein vil kunne handtere om ein er på eit bestemt nivå. Under har eg satt opp kjenneteikna for dei fire nivåa og sett det opp mot dei oppgåvene som er med i analysen.

Nivå 1 - Rigid operasjonell

- Definerer likskapsteiknet operasjonelt, som for eksempel «er lik betyr at ein skal skrive svaret bak».
- Kan handtere likningar på formatet $a + b = c$.
- Kan løyse oppgåve 5

Nivå 2 - Fleksibel operasjonell

- Definerer likskapsteiknet operasjonelt.
- Kan i tillegg handtere likningar som $c = a + b$ og $a = a$.
- Kan løyse oppgåve 5.
- Kan forstå delar av oppgåve 21.

Nivå 3 – Grunnleggjande relasjonsforståing

- Definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. For eksempel ved å sei at det skal vere likt på begge sider, anten direkte eller gjennom forklaring av eksempel.
- Kan løyse likningar som $a + b = c + d$ eller $a + b - c = d + e$.
- Kan løyse oppgåve 21.

Nivå 4 – Komparativ relasjonsforståing

- Definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.
- Veit at ekvivalensen vil vere ivaretatt når ein nyttar gjennomfører like operasjonar på kvar side av likskapsteiknet. Kan for eksempel forklare kvifor «flytt og bytt»-regelen fungerer.

- Kan løyse likningar som inneheld større fleirsifra tal og likningar der ein variabel kan stå fleire plassar. For eksempel: $ax + b = c - x$
- Kan løyse oppgåve 51.

Som Rittle-Johnson et al. (2011) påpeika må ein sjå på utviklinga av forståinga som ein kontinuerleg prosess og derfor har eg ikkje nødvendigvis låst elevane til eit bestemt nivå.

Vidare nytta eg vurderingane gjort ut frå Rittle-Johnson et al. (2011) sitt rammeverk saman med måten elevane forklarte framgangsmåten sin på for å sjå på om eg kunne sei noko om elevane har instrumentell eller relasjonell forståing. For å gjere det laga eg tre kategoriar som står oppført i tabellen under. Desse kategoriane er basert på Skemp (2006) sine definisjonar av forståing. I tillegg satt eg på eit punkt knytt opp mot oppgåvene i denne studia.

Instrumentell forståing	Eleven kan løyse oppgåver der han kan nytte seg av reglar og prosedyrar. Eleven kan forklare kva han gjer når han nyttar seg av dei, men ikkje kvifor dei fungerer. Greier ikkje forklare meir med rettleiing.
På veg mot relasjonell forståing	Eleven kan løyse oppgåver ved å nytte seg av reglar og prosedyrar. Kan forklare kva han gjer og vise teikn til at han forstår litt av det han gjer, men kan ikkje alltid forklare kvifor. Kan sjå nokre samanhengar. Kan forklare meir med rettleiing og somme gonger nyttegjere seg av den rettleiinga i seinare oppgåver.
Relasjonell forståing	Eleven kan løyse oppgåva både med reglar og prosedyrar, og utan. Eleven forklarar kva han gjer, kan forklare kvifor det han gjer fungerer, og kvifor han gjer det på ein måte som kan tolkast som at han forstår det. Det kjem tydleg fram gjennom samtalen at eleven har mange skjema som er knytt saman og at han kan gjere seg nytte av dei i ulike situasjonar.

Tabell 3 - Kategoriar for instrumentell og relasjonell forståing

Elevane som har instrumentell forståing vil kunne løyse oppgåve 5 på eiga hand, men ikkje kunne forklare for kvifor ein låner. Dei vil kunne løyse oppgåve 21 og 51 dersom dei kjenner til reglane som gjeld likningar og ukjende, og nyttar desse for å løyse oppgåva. Dei vil ikkje kunne løyse oppgåva ved å bruke samanlikning og eigenskapane til likskapsteiknet. Desse elevane vil også ligge innanfor Rittle-Johnson et al. (2011) sine to første nivå og ha ei operasjonell forståing av likskapsteiknet.

Dei elevane som er på veg mot relasjonell forståing vil ha instrumentell forståing og derfor på same måte som dei med isolert instrumentell forståing kunne løyse oppgåvene. Det som gjer at ein kan sei om dei er på veg mot relasjonell forståing er at dei vil vere mottaglege for rettleiing til å løyse oppgåvene på andre måtar. Dei vil for eksempel kunne kome seg lengre på veg i oppgåve 21 dersom dei får forklart at ein skal finne ut kva som skal stå bak smilefjeset. Desse elevane vil ha ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, men vil kanskje kunne sjå samanhengen mellom sidene av likskapsteiknet om dei får det forklart.

Elevane med relasjonell forståing kan løyse alle oppgåvene, men dei vil også kunne forklare låning og samanhengen mellom det som står på kvar side av likskapsteiknet. Dei vil sjå at dei ikkje nødvendigvis treng å nytte seg av reglane for likningsløysing for å kome fram til svaret. I oppgåve 21 og 51 vil dei kunne sjå at ein måte å kome fram til svaret på er å sette inn ulike verdiar for variabelen og samanlikne venstre og høgre side, og vil ha ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet. Det er viktig å påpeike at ekvivalensforståing av likskapsteiknet ikkje aleine kan fortelje oss om eleven har relasjonell forståing, då det er fleire faktorar som spelar inn her. Vi kan likevel sei at om dei ikkje har ekvivalensforståing av likskapsteiknet så kan dei ikkje ha ei relasjonell forståing av det.

Det kan vere utfordrande og seie noko om elevane si instrumentelle eller relasjonelle forståing, men eg ville likevel sjå om det var mogleg å kunne gjere ei vurdering av dette.

3.4 Reliabilitet og validitet

I ei kvalitativ undersøking vil forskaren si forståing av emnet kunne påverke undersøkinga, og ein vil ikkje kunne kontrollere reliabilitet og validitet på lik line med kvantitative undersøkingar. I mange kvalitative undersøkingar vil det ikkje vere mogleg å oppnå like forhold som i den originale undersøkinga, og derfor vil det vere vanskar med å reprodusere forsøket.

Datamaterialet som vert nytta i denne oppgåva er både intervjutranskripsjonar, lydopptak og videoopptak som er innhenta på førehand. I denne oppgåva vil ein i stor grad kunne reprodusere forsøket basert på datainnsamlinga sidan det ikkje er eg som har gjennomført datainnsamlinga. Dersom andre vil gjennomføre ei lik studie på det same materialet med same føresetnader som meg, vil dette i stor grad la seg gjere. Ein vil likevel ikkje ha nøyaktig dei same føresetnadane fordi førforståinga av emnet kan vere ulik.

3.4.1 Reliabilitet

Reliabiliteten omhandlar i kor stor grad ein kan stole på datamaterialet, altså forskinga sin pålitelegheit (Christoffersen & Johannessen, 2012, s. 23). I og med at eg baserer denne oppgåva på datamateriale som er samla inn i samband med eit større forskingsprosjekt vil eg derfor seie at ein kan forvente at datamaterialet er svært påliteleg. I kvalitativ forsking bør ein likevel stille spørsmål vel transkripsjonen sin reliabilitet. Det må takast i betraktning at der kan vere ein viss skilnad mellom tale og tekst i ein transkripsjon. Det mest hensiktsmessige om ein vil gjennomføre ein reliabilitetskontroll av transkripsjonane vil vere at fleire fagfolk på uavhengig grunnlag vurderer det same materialet (Befring, 2015, s. 57). Innanfor rammene i dette prosjektet har eg sikra meg at transkripsjonane i størst mogleg grad samsvarar med intervjua ved at eg lytta gjennom lydopptaka og følgde transkripsjonane før eg byrja med analysedelen.

Ei avgrensing i denne oppgåva har vore at eg ikkje har den nærleiken og kjennskapen til datamaterialet som eg ville hatt dersom eg hadde gjennomført datainnsamlinga sjølv. Dette kan vere med på å svekke reliabiliteten ved at eg ikkje kan greie ut fullstendig om utviklinga av data i den delen av forskingsprosessen som er gjort av andre, altså intervjua. Eit verkemiddel for å styrke reliabiliteten i oppgåva vil vere å gjere forskingsprosessen gjennomsiktig (Silverman referert i Thagaard, 2018, s. 188). Ein bør vise korleis ein har arbeida gjennom heile forskingsprosessen og kva val og vurderingar ein har gjort. Eg har gjennom metodekapitelet i denne oppgåva prøvd å skildre så detaljer som mogleg kva førebuingar som vart gjort i forkant av analysen og korleis eg gjennomførte analysen. Forhåpentlegvis har dette bidrege til å styrke reliabiliteten i oppgåva, og lesarane av oppgåva vil forstå kva som er grunnlaget for funna som er gjort.

3.4.2 Validitet

Ei valid slutning er korrekt utleia frå sine premiss og eit valid argument er fornuftig, gjennomtenkt og godt grunngjeve (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276). Validitet er knytt til resultata ein kjem fram til i forskinga og korleis ein tolkar desse (Thagaard, 2018, s. 189). I kvalitativ forsking kan vi vurdere validiteten ved å stille spørsmåla: Undersøker metoden det den er meint til å undersøke? Er tolkingane gyldige i forhold til den verkelegheita vi har studert? (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 276; Thagaard, 2018, s. 189)

Maxwell (1992) skildrar fem kategoriar av validitet, der han meiner fire av dei er relevante for kvalitative studiar. Ein kan bruke innhaldet i desse kategoriane til å styrke validiteten og verdien av kvalitative studiar. Den deskriptive validiteten omhandlar det at dei observasjonane ein gjer og datamaterialet ein skal nytte er av god kvalitet og at det er skildra nøyaktig (Maxwell, 1992,

s. 285-288). I denne oppgåva har eg måtta tru på at dei forskarane som har gjennomført datainnsamlinga har gjort transkripsjonen med stor nøyaktigheit. For å sikre meg dette hadde eg moglegheit til sjå gjennom videoopptaka, lytte til lydopptaka og gå gjennom transkripsjonane samstundes for å sjå om alt er med. Eg valde å lytte til lydopptaka samstundes som eg gjekk gjennom transkripsjonane, og vurderte det til at dette var tilstrekkeleg for å sikre at datamaterialet var av god kvalitet. Tolkingsvaliditeten handlar om å gi ei reell skildring og tolking av det informantane seier. Derfor måtte eg vere forsiktig med å trekke slutningar om kva informantane meiner utan å kunne grunngje det. Eg har derfor vore tydeleg i analysen og i drøftinga på dei punkta der eg meiner eg ikkje har hatt tilstrekkeleg informasjon til å seie noko sikkert.

Teoretiske validitet omhandlar i følgje Maxwell (1992, s. 291-292) å kunne knyte datamaterialet til teori slik at det er ein tydleg og truverdig samanheng mellom data og teori. Dette har eg arbeida med heile vegen, og trekt trådar tilbake til kunnskapsgrunnlaget gjennom all analyse og i drøftingsdelen. Korleis ein kan knyte forskingsresultat opp mot andre personar, tider eller situasjonar er knytt til generaliseringsvaliditeten (Maxwell, 1992, s. 293). I kvalitativ forsking kan ein ikkje systematisk generalisere funna basert på utvalet til større populasjonar, men ein kan kjenne att funna hos andre og dermed kan dei ha ein generell verdi (Maxwell, 1992, s. 293). Målet med oppgåva er å få innblikk i elevar si forståing av likskapsteiknet, og kva forståinga deira kan skuldast. Dette kan ha verdi for andre matematikklærarar i møte med elevar som har ulike forståingar av likskapsteiknet

Sidan validiteten omhandlar gyldigheita av resultata ein kjem fram til og korleis ein tolkar desse (Thagaard, 2018, s. 181) vil validiteten av resultata i denne oppgåva kunne vere påverka av mi forståing. Befring (2015, s. 55) skriv at «det er eit grunnleggjande krav å vere ein sjølvkritisk lesar og tolkar» når ein arbeidar med ein tekst og ein må passe på at datamaterialet gir eit riktig bilete av det ein ønsker å undersøke (Befring, 2015, s. 51). Derfor var det viktig at eg i forarbeidet mitt la mykje tid i å vere kritisk til det materialet eg baserer oppgåva og tolkinga av resultata på. Dette arbeidde eg mykje med då eg gjekk gjennom datamaterialet i forkant av analysen. Både i analysedelen og i drøftinga stiller eg spørsmål ved korleis intervjuarane har gjennomført intervjua og i kor stor grad deira spørsmål undervegs har påverka resultatet. Vidare har eg tatt dette opp i avslutninga av oppgåva og ser med kritisk blikk på korleis min manglande nærleik til intervjua, og avgrensa kjennskap til intervjuarane sin matematiske kunnskap for undervisning kan vere ei svakheit ved studien.

3.5 Forskingsetiske vurderingar

I oppgåva har eg haldt meg til visse forskingsetiske retningsliner. Desse retningslinene krev at «vi utviser redelighet og nøyaktighet i hvordan vi presenterer forskningsresultatene og hvordan vi vurderer andre forskeres arbeid» (Thagaard, 2018, s. 20-21). Ei etisk utfordring eg har prøvd å unngå er tilsikta feil i arbeidet mitt. Det vil i følgje Befring (2015, s. 42) vere å passe på og ikkje trekke konklusjonar som det ikkje er vitskapleg grunnlag for.

Sidan denne oppgåva inneber datamateriale henta frå oppgåvebasert intervju var det særs viktig at eg varetok informantane sitt personvern og samtykke. Kvalitative datainnsamlingar, slik som eit oppgåvabasert intervju er, inneber ofte at ein får tilgang på data som kan knytast til informantane i prosjektet (Thagaard, 2018, s. 21). Sidan det ikkje var eg sjølv som gjennomførte intervjua og samla inn datamaterialet så har eg heller ikkje kjennskap til kven informantane er. Vidare er videoopptaka er filma utan ansikt slik at eg ikkje ville hatt moglegheit til å kunne identifisere nokon av dei. Dette gjer at personvernet til informantane vert varetatt i denne oppgåva og. Det må også presiserast at då datainnsamlinga vart gjennomført henta forskarane inn samtykke til at datamaterialet kunne nyttast i anna forsking ved Høgskulen i Volda.

Sidan datamaterialet er henta inn i samband med eit prosjekt som var ei oppfølging av SPEED-prosjektet (Haug, 2017), vart det innhenta godkjenning av datainnsamlinga til det prosjektet frå Personvernombodet. Eg måtte passe på å halde meg innafor dei rammene som er gitt i samband med dette prosjektet og dei forskingsetiske retningslinene til Høgskulen i Volda. Vurderinga frå Personvernombodet kan sjåast i vedlegg 2.

I oppgåva har eg valt vilkårlege namn på dei elevane som er intervjua, det er ikkje tatt omsyn til kjønn eller noko anna i denne namnsettinga. På denne måten meiner eg at eg har anonymisert dei i tråd med retningslinene. Eg har gjennom analysen og drøftinga stilt spørsmål ved kvifor dei har den forståinga som dei har, men ikkje på ein slik måte at det kan medføre negativitet ovanfor informantane.

4 Analyse

Her vil eg legge fram analysen av relevante situasjonar i intervjua, og drøfte desse ut frå kunnskapsgrunnlaget mitt. Eg prøver å plassere elevane inn i rammeverket og kategoriar ut frå det som kjem fram av analysen. Eg har valt å ta for meg ein og ein elev i analysen og sjå på deira betraktningar rundt kvar av oppgåvene. Dette har eg gjort for å få fram ein «profil» av kvar elev.

4.1 Analyse av oppgåvene

Espen, Sam, Lars og Alice er elevar i femte klasse. Intervjuar har ikkje samtala med dei om oppgåve 51, og derfor har eg ikkje tatt med oppgåve 51 i analysen av intervjua med desse elevane. Dei andre har fått prøve seg på denne oppgåva og hos desse elevane er den med i analysen.

4.1.1 Espen

Oppgåve 5

I	Der du skal rekne ut … 275 minus 84
Espen	[tenker]
I	Og så kan du skrive på det arket der, visst du har lyst. … Ja, det var fort gjort
Espen	Ja
I	Kan du seie litt om korleis du tenkte når du løyste den?
Espen	Ja, berre tenkte at to hundre og syttife> nei 275 minus 84 det blir eit minustal som er … blir i hvertfall mindre enn to hundrede

Espen tek laust på oppgåva med føremål om å finne svaret. Dette kan tyde på at han i denne oppgåva tolkar likskapsteiknet som ein operator for å finne svaret. I denne oppgåva vil nok mange tolke likskapsteiknet som operator sidan det står rekn ut i oppgåva. Denne oppgåva aleine kan ikkje gje oss svar på kva nivå han ligg innanfor i forhold til rammeverket, heller ikkje om han har instrumentell eller relasjonell forståing. Han kan ha ei relasjonell forståing sjølv om han her tolkar likskapsteiknet som operator. Dette er fordi ei relasjonell forståing inkluderer at ein har utvikla symbol- og formalitetskompetansen (Niss & Jensen, 2002) som gjer at ein avkodar symbola riktig i ulike situasjonar, og i denne oppgåva vil det også vere rett å nytte likskapsteiknet operasjonelt som eit «rekn ut» teikn.

Oppgåve 21

I denne oppgåva kryssa Espen av for svaret 12. Han vart spurt om korleis han tenkte, men enda opp med å sei at han berre valde noko.

I <under 9 … det teiknet der … kva betyr det?

Espen Smilefjeset?

I Nei, det før smilefjeset

Espen Er lik?

I Er lik. Kva betyr det?

Espen Visst der er for eksempel 3 pluss 3 så er det 6 …

I ja

Espen … så då tek du er lik og så 6

Då Espen vert spurt om kva likskapsteiknet tydar, svarar han med eit eksempel. Espen sitt svar vil eg sei vitnar om ei tolking av likskapsteiknet som operator der han meiner at når han ser likskapsteiknet skal han rekne ut svaret. Svaret han gir er eit eksempel, som viser til operasjon er lik svar, men det gir ikkje noko god forklaring på kva likskapsteiknet faktisk tyder. Denne forklaringa og utrekninga samsvarar med Rittle-Johnson et al. (2011) sitt nivå éin i rammeverket og dette kan også vere ein indikasjon på at eleven har instrumentell forståing av likskapsteiknet.

Espen og intervjuaren forset samtalen om oppgåva og då Espen går gjennom tankegangen sin finn han ut at han har tenkt feil, og til slutt kjem han fram til at svaret på oppgåva må vere 2.

Espen <Er litt … å, ja … no veit eg det

I Kva då?

Espen 2

I Det skal vere 2

Espen Ja

I Kvifor veit du det?

Espen Fordi 2 pluss 7 det er svaret på 14 minus 5

I Ja

Espen Som er 9

Forklaringa til Espen på kvifor han veit det skal vere 2 er verdt å merke seg. At det eine er svaret på det andre gir indikasjon på at han har ei vidare forståing av likskapsteiknet enn berre som operator. Sjølv om han seier at 2 pluss 7 er **svaret** på 14 minus 5 så impliserer dette at han seier at det som står på kvar side av likskapsteiknet er likt. Det at Espen til slutt greier å løyse denne oppgåva gjer at han viser at han kan få til likningar med operasjonar på kvar side, noko som Rittle-Johnson et al. (Rittle-Johnson et al., 2011) skildrar at høyrer til på nivå tre, *grunnleggande relasjonsforståing*. Eg vil likevel ikkje seie at Espen har forståing på lik linje med nivå tre, fordi han definerer likskapsteiknet som ein operator og ikkje som ekvivalensteikn.

Espen si forståing

Ut frå desse situasjonane vil eg i forhold til rammeverket frå Rittle-Johnson et al. (2011) seie at det er mogleg Espen har ei forståing av likskapsteiknet som er i utvikling mellom operasjonell og grunnleggande relasjonsforståing. Han meistrar likningar med operasjonar på kvar side, men han definerer ikkje likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn direkte. I det han seier at $2 + 7$ er svaret på $14 - 5$ viser han at han har ei viss forståing for at likskapsteiknet symboliserer ekvivalens.

Eg vil sei at Espen sine kompetansar i matematikk er i utvikling. Han går i femte klasse og derfor vil det vere naturleg at den matematiske kompetansen ikkje er fullkomen. Likevel meiner eg at Espen innehar fleire av dei grunnleggjande ferdigheitene i matematikk (Utdanningsdirektoratet, 2013). Han skildrar tankegangen sin og greier å setje ord på det han gjer undervegs og etter kvart. Til dels forstår han symbolspråk for å skape meining i oppgåvene og kan nytte det til problemløysing. Når det då kjem til skilje mellom instrumentell og relasjonell forståing av likskapsteiknet vil eg plassere Espen i kategorien *På veg mot relasjonell forståing*. Espen kan forklare det han gjer og han ser også sine eigne feil når han går gjennom stega sine. Likevel kan eg ikkje på bakgrunn av det intervjuet som er gjort her seie dette bastant då det krev meir samtale og innblikk i Espen sine framgangsmåtar og tankemønster.

4.1.2 Sam

Oppgåve 5

I	Ja, berre ha det der borte du. Du svara 191, kan du fortelje meg korleis du tenkte då?
Sam	Viss>
I	< kva som gjorde at du svarte det
Sam	275 minus 84 så tok eg vekk 80 då blei det 195 så tok eg vekk dei 4 så då blei dei 191

Sam løyser oppgåva greitt og går gjennom korleis han tenkte. Gjennom det han forklarar kan ein tenke seg at han tolkar likskapsteiknet som ein operator. Han seier «så då blei det 191», noko som kan tolkast som at han tenker at det skal stå eit svar etter likskapsteiknet. Dette kan det vere ein indikator på at han forstår likskapsteiknet som ein operator.

Oppgåve 21

I	Du svara 9

Sam Mm

I Korleis tenkte du då?

Sam Fordi 14 minus 5 det blir 9

I Akkurat … og då skal der stå 9 bak det der smilefjeset … Kva det betyr det teiknet som står der?

Sam Kva slags … det der>

I <framfor smilefjeset. Ikkje smilefjeset, men det andre

Sam Er lik

I Er lik. Kva det betyr då? Veit du … kan du seie noko meir enn at det betyr er lik?

Sam Liksom, visst du teke 1 pluss 1 … då må du alltid ha er lik fordi at det skal vere noko svar

I For at det skal vere noko svar, ja … når der då står pluss 7 bak der, kva det betyr? Brukte du at>

Sam <Det betyr at svaret er 9, men så plussar du på 7 etter det

I Ja vel

Sam Så då blir det 16

Sam svarar 9 på oppgåve 21, noko som kan tyde på at han forstår likskapsteiknet som ein operator. Dette vert også tydeleggjort når han skal forklare kva likskapsteiknet tyder. Han seier at ein må alltid ha er lik fordi det skal vere eit svar. Dette vil seie at han er opptatt av at likningar skal vere på forma operasjon er lik svar, og at han ut frå forklaringa definerer likskapsteiknet som operator, som igjen gjer at eg vil plassere Sam inn i nivå éin etter rammeverket til Rittle Johnson et al. (2011). Han forklarar vidare at han skal legge til 7 etter å ha rekna ut venstresida, då nyttar han seg av «legg saman alle»-strategien som McNeil og Alibali (2000) skildrar som ein ukorrekt strategi. Bruken av denne strategien understrekar at han ikkje har ei ekvivalenstolking av likskapsteiknet sidan han då reknar vidare på høgre side av likskapsteiknet. Det er også tydleg at han slit med å skjøne formatet der likninga har operasjonar på kvar side av likskapsteiknet.

Intervjuar bestemmer seg for å forklare at det som står på kvar side av likskapsteiknet skal vere likt og spør kva som skal stå i staden for smilefjeset viss smilefjeset pluss 7 skal vere likt 14 minus 5. Det verkar som om Sam ikkje forstår dette og dei vel å gå vidare med neste oppgåve. Etter dei har gått gjennom dei andre oppgåvene går dei tilbake til oppgåve 21 for å sjå litt til på den. Sam koplar seg på og hugsar at oppgåva starta med $14 - 5$ og at svaret vart 9. Deretter forklarer intervjuar igjen at likskapsteiknet tyder at der som står på den andre sida også skal vere 9 til saman og spør kva som må stå i staden for smilefjeset. Sam svarar 2 og dei avsluttar intervjuet. Ut frå det som skjer til slutt er det vanskeleg å tolke kva Sam tenker om oppgåva, då intervjuar eigentleg forklarar kva han skal gjere.

Sam si forståing

Sam verkar å ha god kontroll på oppgåver på forma «operasjon er lik svar» og han definerer likskapsteiknet operasjonelt. Viss ein ser på Sam sin framgangsmåte spesielt i oppgåve 21 opp mot Niss og Jensen (2002) sine kompetansar meiner eg at det er tydeleg at Sam ikkje har utvikla tilstrekkeleg symbol- og formalitetskompetanse når det kjem til likskapsteiknet sidan han ikkje avkodar det som eit ekvivalensteikn. Han bruker «legg saman alle»-strategien (McNeil & Alibali, 2000) som understrekar bruken av likskapsteiknet som operator, og han tolkar likskapsteiknet som ein operator og definerer det operasjonelt. Dette gjer at eg vil seie at Sam har forståing av likskapsteiknet som operator. Knytt opp mot Rittle-Johnson et al. (2011) sitt rammeverk plasserer dette Sam inn på nivå éin, og eg kan sei at han har ei *rigid operasjonell* forståing av likskapsteiknet.

Sam løyste oppgåve 5 utan problem og trengte ikkje noko rettleiing for å løyse den oppgåva, men i oppgåve 21 greidde han ikkje å løyse utan mykje hjelp og eg vil seie at han ikkje viser nokon teikn til at han har noko forståing av likskapsteiknet som ekvivalensteikn sjølv etter han har fått hjelp gjennom oppgåva. Dette er fordi han ikkje kjem fram til svaret før han får rettleiing fram til at smilefjes pluss 7 skal vere lik 9. Dermed vil eg plassere Sam inn på instrumentell forståing når det kjem til grad av forståing ut frå kategoriane bygd på Skemp (2006) sitt arbeid.

4.1.3 Lise

Oppgåve 5

Lise	[Set opp reknestykket loddrett, tel på fingrane og kryssar av ved 191]
I	Ja. Då har du har sett kryss ved 191 …
Lise	Mm
I	… og du sette det opp eit reknestykke, men kan du forklare kvifor du sette det opp … sånn
Lise	Kvifor …
I	Ja
Lise	<mumlar> det er lettare å rekne når ein får det sånn …

Lise går også gjennom kva ho har gjort. Det at ho set opp reknestykket loddrett kan ein tolke som at ho instinktivt tenker at oppgåva ber ho om å finne svaret. Dette kan tolkast som at ho forstår likskapsteiknet som ein operator i denne oppgåva. Det at ho løyser ei oppgåve på dette formatet og veit at ho skal finne svaret etter likskapsteiknet gjer at vi kan seie at ho minst er på nivå éin etter rammeverket til Rittle-Johnson et al (2011).

Oppgåve 21

Lise [Skriv på arket 14-5=9, 9-7=2. Set kryss på svaralternativet 2]

I Ja, då sette du kryss ved 2 etter å ha rekna litt. Og kan du forklare kor du tenkte no?

Lise Eh … det må vere > eller … eh 14 minus 5 er 9. For at det skal vere 9 på andre sida så må det vere 2 … sånn altså …

I Ja, kva meinte du med 9 på andre sida?

Lise 14 minus 5, det blir 9 …

I Ja

Lise … og ei likning … lik på begge sider …

I Ja

Lise … og … eh … der er 7 frå før av, då tok eg 9 minus 7 og det blei 2, og 2 pluss 7 blir 9 …

I ja

Lise … og då er likninga lik

I Ja. Ja. Og de vil seie det same på begge sider.

Lise mm

I Ja … Flott

Lise tek laust på oppgåva utan noko hjelp og kryssar av for svaret 2. Ho har ikkje problem med at det er operasjonar på begge sider av likskapsteiknet og gjennomfører utrekninga på arket, der ho først reknar ut operasjonen på vestre side før ho samanliknar med den andre sida. Gjennom forklaringa si samanliknar ho dei to sidene og seier at det må vere ni på begge sider. Denne forklaringa gjev indikasjon på at ho tolkar likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Ho får vist at ho meistrar likningar med operasjonar på begge sider av likskapsteiknet, som også understrekar at ho har ei relasjonsforståing av likskapsteiknet sett opp mot rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011).

Oppgåve 51

Då Lise byrjar å sjå på oppgåve 51 brukar ho lang tid før ho gjer noko. Ho gjer seg fleire gongar klar til å skrive. Ho får bekrefta at ho kan gonge når det står eit tal framføre parentesen og då kjem ho i gong med oppgåva.

Lise [skriv]

I Kor du > du prøvde > no prøvde du å sette inn tal, sant?

Lise Mm

I Du prøvde først med 4 … altså det er det> det du har prøvd på der sant å sette inn 4 for x …

Lise Mm

I Kvifor … kva du tenkte der?

Lise Eg tenkte at eg måtte prøve med noko for å sjekke om det kunne bli noko …

Ho skjøner at det å løyse likninga ikkje handlar om å finne eit svar etter likskapsteiknet men ho prøver å finne eit tal å setje inn. Dette viser at ho ikkje tolkar likskapsteiknet operasjonelt som «skriv svaret» i denne oppgåva. Det vil sei at ho viser symbol- og formalitetskompetanse i det at ho avkodar symbola i denne oppgåva slik dei er meint.

I Altså her, kva du sa x var?

Lise Her?

I Ja

Lise 4?

I Ja

Lise Ja, 4 pluss 3 … ja då blir det 7 … eh … nei, det hadde ikkje gått

I Jo, men kva er det den verdien 7 er for noko?

Lise Eh … for det der må bli det same

I Ja

Lise Eh … då hadde 4 måtte stått, då hadde x vert 4 … ja eg berre tar … ja, var sånn

I Ja, og kvifor kom du no fram til at x må vere 4?

Lise Eh>

I Berre sei den siste tenkinga du gjorde no

Lise Skal vere likt på begge sider?

I Ja

Lise Og … då hadde x først 4 og … eller visst x er > visst x er 4 så blir det … 3 gange 3 minus eller ja>

I <Jo>

Lise <nei 3 gange 3 minus 2 … er lik 7 …

I ja

Lise … og visst 7 skal vere det samme der så er … så eller visst der står 4 der då blir det og 7

I Ja, ja … for kva var det no du sa var viktig med ei likning?

Lise Like store på begge sider av likhetsteiknet

I Ja, ja … det er noke av det viktigaste med ei likning

Som intervjuar seier på slutten så er noko av det viktigaste med ei likning at mengda på begge sider av likskapsteiknet er like stor. Det at Lise veit dette er med på å underbygge at ho forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

Det at ho tolkar likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn i denne oppgåva gjer at eg vil plassere ho i anten i nivå tre eller fire etter rammeverket til Rittle-Johnson et al (2011). Lise seier i forklaringa si at ei likning er lik på begge sider, som igjen gjer at vi kan seie at ho forstår likskapsteiknet i denne oppgåva som eit ekvivalensteikn. Ho samanliknar uttrykka på begge sider når ho går gjennom, noko som er eit teikn på nivå fire. Samstundes er det vanskeleg å seie at ho faktisk er på nivå fire fordi intervjuar ikkje spør henne direkte kva likskapsteiknet tydar, og dermed får vi ikkje vete kva definisjon Lise brukar om likskapsteiknet.

Lise si forståing

I og med at Lise tolkar likskapsteiknet som operator i oppgåve 5 og som ekvivalensteikn i oppgåve 21 og 51 har ho utvikla god symbol- og formalitetskompetanse slik at ho avkodar likskapsteiknet som ønska i dei ulike oppgåvene. Lise viser også gode grunnleggjande ferdigheiter gjennom samtale og forklaring. Ho viser at ho både kan lese, skrive og rekne i matematikk gjennom måten ho løyser oppgåvene på. Sidan Lise kan løyse oppgåver med operasjon er lik svar og oppgåver med operasjonar på begge sider, og ho nyttar seg av samanlikning i løysing av oppgåvene viser ho teikn på at ho kan ha ei komparativ relasjonsforståing av likskapsteiknet. Eg vil ikkje plassere henne anten i nivå tre eller fire etter Rittle-Johnson et al. (2011) , sidan eg ikkje har nok informasjon til å vurdere alle aspekt ved nivå fire. Eg vil heller seie at Lise har minimum ei *grunnleggjande relasjonsforståing*, men at ho viser gjennom forklaring og samanlikning at ho er på veg vidare i utviklinga si mot komparativ relasjonsforståing.

Lise kan ta fatt på, og løyse oppgåve 5 og 21 utan noko hjelp frå intervjuaren. Dette syner at ho må ha fleire skjema med løysingsmåtar og samanhengar, slik som Skemp (2009) seier er eit teikn på relasjonell forståing. Oppgåve 51 utfordrar Lise meir enn dei to andre oppgåvene og her treng ho rettleiing for å kome i gong. Ho skjønar kva ho skal fram til og ho testar ut strategiar for å løyse den. Dette er også teikn på at ho greier å hente fram kunnskap og anvende den i ulike situasjonar. Eg synes ikkje eg har tilstrekkeleg informasjon til å avgjere bestemt om ho har relasjonell forståing, men Lise viser tydlege teikn på at ho er på god veg mot ei relasjonell forståing.

4.1.4 Pia

Oppgåve 5

I	Så då er dette første oppgåva … så kan du få sjå litt på den … og så må du berre > visst du har behov for å kladde nedover så må du berre skrive på det arket
Pia	Ja … det er ei stund sidan eg har tatt minus då
I	Ja
Pia	Så skal eg sei korleis eg tenke då
I	Du kan godt sei korleis du tenke undervegs
Pia	So eg > akkurat no tenke eg at eg skal ta 80 minus 70 som verte 190 …
I	Ja
Pia	… og så tek eg 4 pluss 5 som verte 9 … og så teke eg det minus 190 … verte det eit hundre og sytt> vent då … det verte eit hundre og … åttien … trur eg … eller noko sånt. Men det er ikkje her nei

Pia finn ikkje svaret på eiga hand først, men med litt hjelp og etter ho har senka skuldrane litt set ho kryss på 191. Ho vert litt oppgitt over at ho ikkje såg det sjølv med ein gong. Ho snur omvendt på tala når ho forklarar rekneprosedyra, $80 - 70$ seier ho blir 190, så sjølv om ho mest truleg har tenkt $270 - 80$ kjem ikkje dette fram gjennom forklaringa. I staden for å trekke 4 frå 5 legg ho dei saman. Eg tolkar dei usamanhengande forklaringane og utrekningane hennar som teikn på at ho ikkje heilt forstår mekanismane bak subtraksjonsalgoritmen. Dette kan eg igjen tolke som eit teikn på at ho har ei instrumentell forståing av denne operasjonen.

I	Ja. Nei, då dumt > du såg det … det var det viktigaste … det var det … kunne du sett andre måtar å kome fram til svaret … for eksempel det svaret der, kan det vere rett?
Pia	Nei
I	Kvifor kan ikkje det vere rett?
Pia	Kanskje visst du plussa det ja … då kan det ver …
I	Ja, altså det > fordi det poenget er at når det er minus så blir det > kan ikkje det bli større
Pia	Nei

I den første oppgåva vil Pia starte med å trekke frå og finne svaret. Ho les oppgåva og avkodar den til at målet er å finne svaret. Basert på det kan vi seie at ho forstår likskapsteiknet i denne oppgåva som ein operator. I denne oppgåva vil ei slik avkoding av likskapsteiknet vere tilstrekkeleg i løysinga av den. Ho viser også grunnleggjande ferdigheiter munnleg gjennom å skildre tankegangen sin.

Oppgåve 21

I	Då skal du få den oppgåva der
Pia	Ja. Hva tall må skjule seg bak smilefjeset for at … ja 14 minus 5 … er lik og så pluss 7?
I	Ja
Pia	Vent kva> det der skjønte ikkje eg pluss 7
I	Spørsmålet er … kva tal skjuler seg bak det smilefjeset
Pia	Ja … sånne oppgåve har vi hatt før
I	ja
Pia	Men kva … eh kva svaret liksom skal bli er det …

Ho startar med å lese oppgåva, men ho skjøner ikkje heilt kva oppgåva ber om. Det kan tyde på at ho ikkje greier å avkode symbola i oppgåva. Det er tydleg at ho ikkje skjønar samanhengen mellom spørsmålet og det som står skrive matematisk, og dette er ein indikasjon på at ho enda held på å utvikle den grunnleggjande ferdigheita «å lese i matematikk». Det er også teikn på at ho fortsatt har ein veg å gå når det kjem til symbol- og formalitetskompetanse, og kommunikasjonskompetanse slik Niss og Jensen (2002) skildrar desse. Pia får vidare hjelp til å forstå kva oppgåva spør om.

I	Altså det vi er ute etter er visst vi fjernar det smilefjeset …
Pia	Å, ja. 14 minus 5. 9. Vent litt då … 9
I	Og kva tenkte du då?
Pia	14 minus 5
I	Ja. Og det er lik 9
Pia	Ja
I	Ja
Pia	Eg berre … ja
I	Ja, er det andre svar du tenke … kan vere rett ikkje rett?
Pia	Som kan vere rett?
I	Ja
Pia	Nei, ikkje visst eg har skjønt oppgåva rett då

I Nei. Ja. For du ten> 14 minus 5 …

Pia Ja

I … det er lik 9. og dermed er 9 rett

Pia ja

Ho er rask med å svare 9 når ho får forklart at ho skal finne ut kva som skal vere under smilefjeset. Ho seier at ein må ta $14 - 5$ som bli 9. Denne framgangsmåten viser at ho nyttar seg av den ukorrekte strategien «legg saman fram til likskapsteiknet» (McNeil & Alibali, 2000) der ho gjer operasjonen som står til venstre for likskapsteiknet, men overser den som står til høgre etter smilefjeset. Dette viser at Pia viser at tolkar likskapsteiknet som ein operator også i denne oppgåva og understrekar at ho må ha ei operasjonell forståing av likskapsteiknet.

Dei let oppgåva ligge og ser på dei andre oppgåvene før dei ser på den igjen til slutt. Det repeterer at dei har kome fram til at $14 - 5 = 9$ og skal jobbe vidare med oppgåva.

I Men kva betyr det at der står pluss 7 då?

Pia Nei, det veit ikkje eg … å ja, at eg skal plusse 7 eller noke

I Ja

Pia 7 pluss 9? … eller

I Ja, betyr det det?

Pia Nei, eg veit ikkje eg

I2 Visst du ser på det der teiknet framom det der smilefjeset, kva betyr det teiknet der?

Pia Er lik

I Ja … og kva betyr er lik

Pia Aaa … nei, det har eg aldri tenkt på

I Nei

Pia Veit ikkje eg

I Nei … Kor> Kva du > Når du, når du ser eit sånt … sånt er lik teikn i boka di, kva tenke du då?

Pia At eg skal skrive svaret framføre

I At du skal skrive svaret etter det eller framføre det alt etter som

Pia Ja

Som vi ser på svara til Pia i samtalen vil ho, etter litt rettleiing og hjelp, nytte seg av «legg saman alle»-strategien skildra av McNeil og Alibali (2000). Denne strategien vitnar om ho også her tolkar likskapsteiknet som operator. Ho søker å finne eit svar i enden av oppgåva. Intervjuar spør ho om kva likskapsteiknet betyr og ho svarar at det betyr «er lik». I oppfølginga svarar ho at ho ikkje veit kva «er lik» betyr for det har ho ikkje tenkt på, men ho tenker at ho skal skrive svaret når ho ser eit slik teikn. Igjen bekreftar dette at ho har tolkar likskapsteiknet som ein operator. Framgangsmåten til Pia i denne oppgåva gjer at eg vil plassere ho i nivå 1 etter rammeverket til Rittle-Johnsen et al. då det verkar som om ho ikkje meistrar å løyse ei likning med operasjonar på to sider av likskapsteiknet.

I Dette er eigentleg eit teikn som betyr at det skal vere det same på begge sider … så dermed kan det å skrive svaret vere heilt fin tenking …

Pia mm

I … og heilt rett. Men ein annan> litt annleis måte å tenke på det er at det skal vere likt på begge sider av likheitsteiknet …

Pia mm

I … då kan du tenke at den må vere lik den

Pia Å, ja. Sånn

I Å kva blir svaret då?

Pia Å, ja så> sånn at der skal … kva du meiner at … at reknestykka skal vere like store, at begge to skal få svaret 9? eller … er det>

I <Ja, for eksempel

Pia Visst eg skrive 2 der då blir det der 9 då

I Då blir det 9 og ja

Pia får forklart at ein kan tenke at det skal vere likt på begge sider av likskapsteiknet og at venstresida må vere lik høgresida. Då kjem Pia til slutt fram til at ho kan skrive 2 der smilefjeset står og ho har fått 9 på begge sider av likskapsteiknet. Det er positivt at Pia gjennom forklaring ser ut til å forstå forklaringa til intervjuar og dermed ser samanhengen i oppgåva. Det er likevel ikkje gitt at ho har oppnådd ei ny forståing av likskapsteiknet basert på at ho greidde å kome fram til svaret i denne oppgåva.

Oppgåve 51

I Då har vi noko som er ei likning … eg veit ikkje om de har vore bort i det endå …

Pia Nei

I … eh og då er det eigentleg berre eit spørsmål om kva slags tal x kan vere … rett og slett … Visst x er> du tenke at x betyr eit tal, eit bestemt tal og det står det same talet der som der. Greie du då å prøve finne kva tal det kan vere?

Pia	Nei, eg trur ikkje det

I	Nei

Pia	Eg er ikkje sikker på om vi har hatt det der endå

I	Nei, eg trur ikkje de har hatt det. Det er litt tidleg endå i 8. klasse

Pia	Ja

I	Men de har løyst litt liknande oppgåve tidlegare, men ikkje med x trur ikkje eg

Pia	Nei … nei eg skjønner nesten ikkje kva som står der eg nesten

Pia får presentert oppgåve 51 men ho prøver ikkje å løyse den, for ho skjønar ikkje kva som står der. Det verkar som om ho ikkje greier å sjå dei samanhengane som ho treng for å kunne løyse oppgåva. Ho seier nesten ikkje skjønner kva som står i oppgåva og vi kan sjå det opp mot symbol- og formalitetskompetansen til Niss og Jensen (2002) og evne til avkoding og omsetjing. Det kan tolkast som at Pia ikkje har utvikla nok kompetanse til å avkode oppgåver som ser annleis ut enn dei formata ho kjenner frå før.

Pia si forståing

Gjennom oppgåvene er det tydleg at den operasjonelle forståinga av likskapsteiknet står sterkt hos Pia. Det at ho ikkje kan forklare kva «er lik» tyder, anna enn at når ho ser teiknet så skal ho skrive svaret er ein viktig indikator på forståinga til Pia. Sjølv om ho til slutt greier å kome fram til svaret i oppgåve 21, treng ho mykje hjelp for å kome dit. Dette viser at ho verkar å streve med likningar der det er operasjonar på begge sider av likskapsteiknet. Den manglande definisjonen og vanska med å løyse oppgåve 21 saman med at ho tolkar likskapsteiknet som ein operator i oppgåve 5 gjer dette at eg plasserer ho i nivå éin i rammeverket frå Rittle-Johnson et al. (2011). Dermed vil eg sei at ho har ei rigid operasjonell forståing av likskapsteiknet.

Pia går i åttande klasse og har hatt nokre år på å arbeide med utviklinga av den matematiske kompetansen og dei matematiske ferdigheitene sine. Eg ser likevel at når det kjem til likskapsteiknet har Pia fortsatt mykje å gå på viss ein ser på Niss og Jensen (2002) sine kompetansar. Ho strevar med å forstå kva oppgåve 21 faktisk spør om og ho tolkar ikkje likskapsteiknet på høveleg vis utan hjelp. Dette vitnar om manglande symbol- og formalitetskompetanse, og kommunikasjonskompetanse. Dette kan igjen kan knytast opp mot det Kilpatrick et al. (2001) legg i ferdigheitene forståing og strategisk kompetanse. Ho forstår ikkje fullt ut det matematiske konseptet ekvivalens som likskapsteiknet representerer og ho slit med å løyse oppgåvene på eiga hand. Evna henna til å løyse oppgåva vert forhindra av at ho har manglande kompetansar og ferdigheiter.

Pia treng mykje hjelp og rettleiing for å løyse oppgåve 21, der ho ser på likskapsteiknet som ein operator og gir ei operasjonell forklaring i det ho vert spurt om kva det tyder. Ho seier også ho aldri har tenkt på kva teiknet betyr, noko som igjen understrekar at ho har ei mangelfull forståing av teiknet. Derfor vil eg plassere Pia i kategorien *instrumentell forståing*. Det at Pia tek imot ny kunnskap om likskapsteiknet, slik som i samtalen om oppgåve 21, gjer at eg vil seie at Pia har moglegheiter til å utvikle si forståing av likskapsteiknet. Ho viser at ho er open for å utvide forståinga si. Dette kan minne litt om den indikasjonen som Falkner et al. (1999) såg i forskinga si om at elevar gjennom diskusjon hadde lært å sjå likskapsteiknet som eit symbol for relasjon heller enn ein operator. Eg synes likevel at det ikkje er tilstrekkeleg nok til å seie at ho er på veg mot relasjonell forståing, då ei forståing av ekvivalensteiknet som eit relasjonssymbol aleine ikkje er ein tilstrekkeleg indikator på dette. Ein annan ting som er med på å understreke at vi kan sei at Pia har instrumentell forståing, er at ho ikkje prøver å løyse oppgåve 51. Ho seier ho nesten ikkje skjønner kva som står der. Dette har eg tolka til at ho ikkje ser samanhengane som trengs for å løyse oppgåva uavhengig av om kan nytte seg av reglar som for eksempel «flytt og bytt». Det er mogleg å løyse oppgåva ved å setje inn tala som er oppgitt som alternativ dersom ein skjønar at ein kan gjere dette. Dette er noko som igjen er med på å understreke manglande relasjonell forståing.

4.1.5 Lars

Oppgåve 5

I Er det vanskeleg?

Lars Ja

I Ja … kva er det du prøvar å gjere?

Lars Berre sånn 275 minus 84

Lars set i gang med oppgåva og skriv, han brukar litt tid og intervjuar vel å starte samtalen. Han har prøvd å setje opp reknestykket under kvarande for å rekne ut, men strevar med låning. Dei går gjennom utrekninga steg for steg og kjem fram til at svaret blir 191. Vidare samtalar dei litt om kva han har tenkt.

I Eg såg du dreiv å peikte på 191 mens> før du rekna … kvifor gjorde du det? … eller det er ikkje sikkert du gjorde det … det berre såg sånn ut for meg

Lars Nei, eg gjorde sånn [Peikar med blyanten på reknestykket i oppgåva]

I Å, ja. Du peika på den. Det var ikkje det at du trudde det var 191 før du …

Lars Nei, eg trudde det var noko her borte [Peikar på svaralternativet 199]

I Akkurat. Kvifor trudde du det var noko her borte då

Lars	For at det blir noke … under 200

Sidan Lars prøver å løyse oppgåva med å ta $275 - 84$ vil eg sei at han i denne oppgåva tolkar likskapsteiknet som ein operator. Det vil i denne oppgåva vere tilstrekkeleg å avkode likskapsteiknet som eit teikn for å rekne ut for å løyse den. Han viser at han forstår samanhengen at det må bli mindre enn 200 som vitnar om at han ser relasjonen i det matematiske som står reknestykket. Dette viser at han har utvikla kommunikasjonskompetansen sin tilstrekkeleg til å løyse denne oppgåva.

Oppgåve 21

I	Så er der ei …

Lars	9 … <mumlar: seksten>

I	Ja, då blir det 16. Og kor du tenkte no når du rekna? Eg såg du først fekk du 9 og så la attåt 7 og så fekk du 16

Lars	Ja>

I	<kva var det du då tenkte?

Lars	Eg tenkte berre sånn 9 … nei 14 minus 5 det er 9

I	Mm

Lars	… også tok eg … og så tok eg berre å la på 7 igjen

I	Ja, så då fekk du> Kan du lese kva som står> kva seie oppgåva

Lars	Hvilket tal må skjule seg bak …

I	Smilefjeset ja

Lars	… smilefjeset for at reknestykket …

I	… likninga skal vere … eller reknestykket eller likninga skal vere riktig

Lars	mm

I	Så det du skal prøve å finne ut er kva tal som skal stå der …

I denne oppgåva går Lars rett på sak og reknar ut $14 - 5 = 9$ og $9 + 7 = 16$. Igjen ser vi ein av elevane nytte seg av «legg saman alle»-strategien til McNeil og Alibali (2000). Dette kan tolkast som eit teikn på at han forstår likskapsteiknet som ein operator og at han kan tenke at føremålet med oppgåva å rekne ut eit svar. Denne ukorrekte strategien er med på å vise at han ikkje ser ekvivalenstydinga sidan han reknar vidare på høgre side av likskapsteiknet. Det kan verke som om han ikkje har lest oppgåveteksten heilt grundig. For den spør om kva tal som skjuler seg bak smilefjeset for at det skal vere riktig. Den spør ikkje om at han skal rekne ut svaret sjølv om det er det han gjer. Det at han kanskje ikkje les og tolkar oppgåveteksten før han startar med utrekning tenker eg kan vere eit teikn på at han treng å øve på den grunnleggjande ferdigheita å lese i matematikk, og at han må vidareutvikle symbol- og formalitetskompetansen og kommunikasjonskompetansen sin. Dette fordi han ikkje greier å avkode oppgåva riktig og ikkje tolkar den matematiske teksten slik han burde. Hadde han lest oppgåveteksten og skjønt den med ein gong ville det kanskje har vore lettare å avkode symbola i oppgåva. Det er ikkje gitt at han då ville tolka likskapsteiknet annleis for det er tydleg vidare i samtalen at han forstår det som ein operator og eit symbol for å skrive svaret.

I	Trur det … kva betyr det der teiknet der?
Lars	Er lik
I	Og det betyr at …
Lars	Svaret er der
I	At svaret er der?
Lars	Mm
I	Mm … visst eg seie at det også skal bety at … det skal vere likt på begge side … det som står der … skal vere akkurat det same som står der … eller det som står der skal vere akkurat det same som står der
Lars	Så det som der der borte då skal det bli … 14
I	Nei, då har du rekn> ikkje 14 men då har du rekna ut at det skal vere … det der blir 9 …
Lars	Mm
I	… og det er heilt rett … og det betyr at det der også skal vere 9 … kva må då stå der?
Lars	2

Lars svarer at likskapsteiknet betyr at svaret er der, altså at svaret skal stå bak likskapsteiknet. Dette er ein tydeleg indikator på at han forstår likskapsteiknet som ein operator. Han tek ikkje omsyn til at der står ein operasjon etter smilefjeset verkar det som. Det kan vere eit teikn på at han ikkje er kjend med likningstypar av ulike format. På slutten kjem Lars likevel fram til at svaret på oppgåva må bli 2. Då har han fått forklart det skal stå det same på begge sider av likskapsteiknet. Så han greier å løyse likninga med rettleiing frå intervjuar.

Lars si forståing

Det er tydleg at Lars skjøner den operasjonelle tydinga av likskapsteiknet, og det er også slik han definerer tydinga av likskapsteiknet. For Lars er det opplagt at når han ser likskapsteiknet skal han rekne ut og finne eit svar på slutten av oppgåva. Det at han nyttar «legg saman alle»-strategien (McNeil & Alibali, 2000) er også med på å stadfeste den operasjonelle forståinga hans av likskapsteiknet. Sett opp mot Rittle-Johnson et al. (2011) sitt rammeverk meistrar Lars oppgåver som er skildra på nivå éin i og med at han ikkje greier å løyse oppgåve 21 på eiga hand.

Som det kjem fram tidlegare i analysen kan det verke som om Lars ikkje tolkar oppgåveteksten før han løyser oppgåva. Han tolkar oppgåva direkte basert på dei matematiske uttrykka som står der. Dette kan vere ein medverkande faktor til at han går for den operasjonelle tolkinga av likskapsteiknet i oppgåve 21. Som Niss og Jensen (2002) seier heng dei ulike matematiske kompetansane saman, og derfor kan det vere avgrensande for dei andre når han ikkje viser tilstrekkeleg symbol- og formalitetskompetanse, og kommunikasjonskompetanse til å løyse oppgåva på eiga hand frå start. Basert på dette vil eg seie at Lars har ei rigid operasjonell forståing av likskapsteiknet.

Basert på korleis han løyser oppgåvene og dei forklaringane han gir, vi eg sei at Lars si forståing av likskapsteiknet hovudsakleg er instrumentell, sett opp mot Skemp (2006) sine definisjonar. Han forstår den operasjonelle tydinga av likskapsteiknet når det står i ei oppgåve der ein kan avkode teiknet som ein operator, men når han møter ei oppgåve der dette ikkje er tilfelle og han ikkje har ekvivalensforståinga av likskapsteiknet får han problem med å løyse denne på eiga hand. Det fine er at Lars med rettleiing av intervjuar greier å kome fram til svaret. Dette viser at han kan putte den nye kunnskapen han har fått om likskapsteiknet kan inn i eksisterande skjema og ta dette i bruk for å kome fram til svaret. Det er likevel ikkje ein god nok grunn til å seie at han derfor har fått ei relasjonell forståing av likskapsteiknet, men det viser at han er mottakeleg for å utvide forståinga si knytt til likskapsteiknet og eg kan seie at han no kanskje er eit steg nærmare relasjonell forståing enn før.

4.1.6 Alice

Oppgåve 5

I	Der er første oppgåva og så kan du skrive alt det du vil på arket og sånn … ja
Alice	[Kryssar av på 191]
I	Det gjekk raskt. Kan du sei korleis du løyste den?
Alice	Eg tenkte først med 1-ar plassen då blir der … då tar vi … <slutte å skjelve> … då tar vi først firar og femar …
I	Mm
Alice	… minus 5 minus 4 er lik 1 og då blir det 271 og då vi tok ned den der … då blir det då tenkte eg vi kunne ta vekk ein tiar slik at det blir 201 og då tar eg den siste 10-aren ned sånn at det blir 191

I Ja … glimrande. Heilt rett. Så det der gjekk raskt og ikkje noko problem. Og du begynte med einarane og så tok du tiarane etterpå.

Alice kryssar raskt av på 191 og ho forklarar korleis ho tenkte. Ho viser at ho har munnlege ferdigheiter, og kan uttrykke seg matematisk når ho forklarer framgangsmåten sin. Sidan ho gjennom forklaringa viser at ho har tolka det til at ho skal trekke 84 frå 275 kan vi sei at ho i denne oppgåva forstår likskapsteiknet som ein operator. Dette også fordi ho nyttar «er lik» når ho forklarar at ho trekk i frå. Det vil vere tilstrekkeleg å avkode på denne måten i denne oppgåva då den ber om at ein skal rekne ut.

Oppgåve 21

I Då er det neste oppgåve … ver så god

Alice Ok … 14 minus ein femmar er lik …. Pluss … ja, okei … 14 minus 5 det blir 9 og 9 pluss 7 det er 16

Alice går rett på sak i løysinga av oppgåve 21 og nyttar seg med ein gong av «legg saman alle»-strategien (McNeil & Alibali, 2000) slik som fleire av dei andre elevane. Bruken av denne strategien gjer at eg vil seie at ho i denne oppgåva også tolkar likskapsteiknet som ein operator.

I Ja, så du har 14 minus 5 det er 9 … og så sa du 9 pluss 7 det er 16… Men visst du ser kva som står i teksta … på den der oppgåva

Alice Hvilket tall må skjule seg bak smilefjeset for at regnestykke ligning skal være riktig

I Ja … det teiknet der … kva betyr det? … Det der før smilefjeset

Alice Er lik?

I Er lik. Kva betyr det?

Alice Det betyr at det blir … det er lik … det skal vere akkurat det like svaret som det er på den andre sida

I Det skal vere like mykje på den andre sida … ja

Intervjuar spør Alice om å sjå på teksten i oppgåva for å finne ut kva ho veit om likskapsteiknet. Alice gjenkjenner teiknet «er lik» og veit at det betyr at skal vere like svar på begge sidene. Denne forklaringa viser at Alice kjenner ekvivalenstydinga av likskapsteiknet. Ho brukar likevel ordet «svar» i definisjonen, noko som kan tyde på at ho har ei forsterka forståing av at likskapsteiknet heng saman med å gi eit svar på noko. Dette kan ein også sjå gjennom at ho nyttar seg av «legg saman alle»-strategien (McNeil & Alibali, 2000) for å løyse oppgåva, at ho tenker at likskapsteiknet symboliserer at det skal stå eit svar etter det. Dette kan sjølvsagt skuldast at ho ikkje har lest oppgåva, eller ikkje greier å omsetje den matematiske teksten korrekt når ho berre ser oppgåva. Dermed kan det hindre ho i å best mogleg få utnytta dei kompetansane og ferdigheitene som ho har for å løyse oppgåva.

Alice	Visst det … står er lik her og det smilefjes …
I	Ja>
Alice	<då må det kanskje vere 7 … visst det blir er lik … dette her var vanskeleg
I	(latter) Ja då det er kanskje litt sånn vanskeleg … men du sa at 14 minus 5 det er 9 … og så skal det vere like mykje på begge sider … så då er det 9 på den der sida … av likskapsteiknet
Alice	Og 5 på den der sida
I	Ja, der er 7 til no
Alice	7?
I	Er ikkje der det?
Alice	Jo
I	Korleis kan ein klare å få det til å bli 9 då?
Alice	Med å plusse med ein 2-ar

Vi ser av resten av samtalen at Alice likevel synes oppgåva er vanskeleg sjølv om ho er bevisstgjort på at ho skal finne ut kva tal som trengs for at det skal bli likt. Ho får rettleiing av intervjuar slik at dei kjem fram til svaret. Det at ho må rettleiast for å greie å løyse oppgåva kan ein tolke som at ho har ei instrumentell forståing sidan ho ikkje greier å gjere seg nytte av den nye informasjonen ho får tilført.

Alice si forståing

Knytt opp mot rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011) vil eg plassere Alice mellom nivå to og tre. Ho definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn i det ho veit at tydinga av likskapsteiknet er at det skal vere likt på begge sider. Dette er ein god indikator på at ho har ei ekvivalensforståing av teiknet. Denne defineringa isolert sett gjer at ho kan vere på nivå tre. Sidan ho strevar med å løyse oppgåva med operasjonar på begge sider er det nærliggande å tru at ho ikkje er fortruleg med oppgåver der likskapsteiknet ikkje kan avkodast som ein operator. Dette syner ho også gjennom bruken av «legg saman alle»-strategien (McNeil & Alibali, 2000) i det ho løyser oppgåve 21. På grunn av dette kan eg ikkje plassere ho på nivå tre, men måten ho arbeidar med oppgåvene på gjer at eg plasserer ho hovudsakleg inn på nivå to i rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011). Eg vil sei at Alice har ei fleksibel operasjonell forståing med innslag av ei grunnleggande relasjonsforståing som kjem av at ho kan definere likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

Det at Alice synes det er vanskeleg å løyse oppgåve 21 og treng hjelp kan vere eit teikn på at ho har ei instrumentell forståing av likskapsteiknet, sjølv om ho har forstått relasjonen som teiknet symboliserer. Ho veit kva det betyr og ser samanhengen, men ho klarer ikkje gjer seg nytte av den kunnskapen til å løyse oppgåva på eiga hand. Når ho reknar så gjer ho seg nytte av likskapsteiknet operasjonelt. Alice veit at likskapsteiknet tyder at det skal vere likt på begge sider, men nytter seg av «legg saman alle»-strategien. Derfor vil eg sei at ho vektlegg den operasjonelle tydinga av likskapsteiknet mest. Dette kan kanskje skuldast kva erfaringar ho har med likskapsteiknet sitt frå undervisning, eller det kan kanskje skuldast at ho ein gong har lært at når det står «er lik» skal ho skrive svaret, men dette kan eg ikkje sei sikkert sidan eg ikkje veit. Eg vil derfor plassere Alice i kategorien instrumentell forståing etter Skemp (2006) sine definisjonar. Det som skal nemnast er at Alice er open for rettleiing og hjelp til å forstå, dermed er dette eit godt teikn på at ho med meir jobbing med likskapsteiknet kan kome seg på veg mot relasjonell forståing.

4.1.7 Even

Oppgåve 5

Even	< skal eg løyse den?
I	Du skal løyse den, ja
Even	Ok, då gjer eg det sånn [Skriv]
I	Då kryssa du av på 191 etter å ha rekna ein del … og du stilte det opp på sånn vanleg måte …

Even stiller opp tala loddrett og reknar ut svaret ved å trekke 84 frå 275. Sidan han vel å rekne ut oppgåva slik og kjem fram til svaret så har han truleg avkoda likskapsteiknet som ein operator i denne oppgåva, og det vil også vere det som er mest tenleg her. Dette indikerer at Even forstår likskapsteiknet som ein operator. Denne oppgåva kan Even ta fatt på utan hjelp og han meistrar oppgåveformatet operasjon er lik svar. Basert på dette kan vi seie at Even i alle fall er på nivå éin, at han har rigid operasjonell forståing, ut frå Rittle-Johnsons et al. (2011) sitt rammeverk.

Oppgåve 21

Even	Likning ja … 14 minus 5 er lik … ja … 14 minus 5 det er no 11 … 4 mi> nei … 14 minus 5 nei ikkje 11, 9 er det ….
I	mm
Even	… og då må det bli 2
I	Kvifor må det bli 2?
Even	Fordi at det > i og med det der er det samme som 11 …

I	ja
Even	… så må det der også bli 11 og då må vi legge til … nei, nei kva eg seie 11 for < latter > eg meiner … 9 …
I	ja
Even	… og då må det der også bli 9
I	Ja … og då må du ha 2 for at … ja …
Even	ja
I	… ja, så du trong ikkje å begynne å … du trong ikkje begynne å på ein måte desse her metodane for å løyse likningar … du såg at det må vere likt på begge sider …
Even	ja
I	Ja, men det er heilt rett

Even gjenkjenner raskt at denne oppgåva er ei likning og byrjar å løyse den. Han kjem raskt fram til svaret, forklarar og argumenterer godt for kvifor det må bli slik. Gjennom forklaringa si samanliknar han og seier implisitt at det skal vere likt på begge sider av likskapsteiknet. Forklaringa gjer at vi kan seie at Even forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Det at han kan løyse ei likning med operasjonar på begge sider, og at han gjennom forklaringa viser teikn til ekvivalensforståing, gjer at eg kan sei at Even minimum har *grunnleggjande relasjonsforståing* slik Rittle-Johnson et al. (2011) skildrar det.

Oppgåve 51

I	Då er det den siste
Even	< mumlar nei > … nei, eg er heilt usikker
I	Er du heilt usikker. Kva er det du prøvar å gjere?
Even	Nei, eg prøvar å flytte over men …
I	Ja, du prøvar å løyse likninga ved å bruke dei …
Even	Ja
I	… reglane som du har lært >
Even	< men eg har aldri vore bort i likningar med parentesar før >

Når Even kjem til oppgåve 51 er han usikker på korleis han skal starte. Han seier han prøvar å flytte over, noko som verkar å vere at han ønsker å nytte seg av «flytt og bytt»-regelen. Dei går ikkje nærmare inn på «flytt og bytt»-regelen, noko som er litt dumt då dette kunne vore med på å gi eit betre bilete av kva forståing Even har av likskapsteiknet og likskap. Det kunne også gitt meg ein indikasjon på om han har ei relasjonell forståing i arbeid med likningsløysing, men setninga «…eg prøvar å flytte over..» seier meg ikkje noko om korleis han forstår. Om han hadde fått forklare regelen ville det kunne avdekt om han skjøner at det er mogleg å gjer som ein gjer på grunn av likskapsteiknet og det som ligg eigenskapane ved ekvivalens. Det vi kan ta med oss frå dette utsnittet er at han les oppgåva og det matematiske innhaldet på ein slik måte at han avkodar det til å skjøne at han skal finne ei løysing på likninga. Denne avkodinga viser at han har utvikla kompetansar for å kunne gjer dette, og han kan å lese i matematikk.

I Kva betyr det der teiknet der?

Even At det skal vere det samme der og der

Intervjuar spør Even om kva likskapsteiknet tyder, og Even svarer at det skal vere likt der og der. Sjølv om det ikkje er transkribert at han peikar på kvar side av likskapsteiknet, vel eg å tru at det er det han gjer. Dette viser at han kjenner ekvivalenstydinga til likskapsteiknet. Denne forklaringa, og gjenkjenninga av oppgåva som ei likning gjer at eg igjen kan sei at Even er på nivå 3 i Rittle-Johnson et al (2011) sitt rammeverk.

I At det skal vere det samme der og der… Går det då ann å teste ut for desse her alternativa her?

Even Ja, eg kan prøve med 4 først. Men eg tvilar på at det går då men eg kan prøve

I Kvifor tvilar du det?

Even Eg veit ikkje … 3 gange 3 er 9 minus 2 er 7 … so 4 pluss 3 … nei … visst x er lik 4 så blir det …

I Ja, no har du sett x lik 4 der og du har sett x lik 4 der. Er ikkje det det du har gjort?

Even Jo

I Ja. Kva får du då?

Even X er lik 4?

I Ja, kvifor?

Even Fordi at det er det begge plassane

I Ja, ja kva som er begge plassar

Even Der er likt der og der

I Ja, kan du du > ja for du … kva blei det der? Sa du

Even 7

I Og det der

Even 7

Gjennom samtalen her løyser dei oppgåva gjennom samanlikning av sidene, Even tek til seg informasjonen og er open for å teste ut og setje inn alternativa som oppgåva gir. I løpet av samtalen viser Even at han kan sjå samanhengar og han nyttar seg av det han har forstått undervegs i det han forklarar. Dette er eit teikn på at han kan kople saman ny informasjon med det han kan frå før og han kan nyttegjere seg i problemløysing. Dette kan ein sjå på som eit teikn på relasjonell forståing.

Even si forståing

Det at Even klarer å avkode likskapsteiknet på ulike måtar i oppgåvene viser at han har ei breiare forståing av likskapsteiknet enn berre *rigid operasjonell*. Even viser at han har ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet sidan han seier det skal vere likt på kvar side av likskapsteiknet. Sidan Even løyser alle oppgåvene til slutt viser han at han meistrar likningar med operasjonar på begge sider, også der den ukjende variabelen er representert på begge sider av likskapsteiknet. Dette gjer at eg vil plassere Even inn mellom nivå tre og fire etter rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011) og vi kan sei at han minimum har ei grunnleggjande relasjonsforståing av likskapsteiknet. Minimum fordi det er fleire ting som syner at han har kome lengre på veg i forståingsprosessen, som det at han kan tolke ei likning med ukjend variabel fleire stader.

Om Even hadde fått moglegheit til å forklare kva han tenkte med å flytte over kunne ein ha fått vete noko om forståinga han har av å oppretthalde ekvivalensen når ein gjennomfører like operasjonar på kvar side av likskapsteiknet. Dersom han kunne forklart dette så ville det kunne gitt oss enda eit punkt for å argumentere for at han har forståing som samsvarer enda meir med Rittle-Johnson et al.(2011) sitt fjerde nivå, komparativ relasjonsforståing.

Når det kjem til instrumentell og relasjonell forståing ville det også vore lettare å vurdert dette om Even hadde fått forklart «flytt og bytt»-regelen. Men det vi kan vurdere for å finne ut meir om dette er korleis han ser samanhengar og kan bruke kompetansen sin. Even viser at han kan nytte seg av dei skjema som han har opparbeida seg, og kan ta att den kunnskapen han treng for å løyse oppgåve 5 og 21, sjølv om dei er ulike. Han får også til å løyse oppgåve 51 med rettleiing av intervjuar, og her viser han gjennom samtalen at han kan nyttegjere seg av den informasjonen han får lagt fram undervegs. Desse funna gjer at eg vil sei at Even har ei forståing som strekk seg forbi instrumentell og er på god veg mot relasjonell. Eg synes ikkje eg har fått tak i tilstrekkeleg informasjon frå samtalen til å kunne sei at han har ei relasjonell forståing. Even viser fleire teikn som er positive med tanke på relasjonell tankegang og forståing, og dette vil han ha nytte av vidare i skulegangen sin.

5 Drøfting

Her vil eg presentere dei sentrale funna i analysen og drøfte dette opp mot kunnskapsgrunnlaget mitt. Eg har også sett på kva dette kan seie oss om undervisning av ekvivalens i grunnskulen.

I denne oppgåva har eg sett på elevar si forståing av likskapsteiknet i tre oppgåver som vart gitt i samband med ei oppfølgingsstudie i etterkant av SPEED-prosjektet (Haug, 2017). Eg har tatt utgangspunkt i at ein kan dele forståingane inn i to hovudgrupper:

1. Likskapsteiknet som ekvivalensteikn
2. Likskapsteiknet som operator

For å få kunne vurdere dette tok eg i bruk eit rammeverket utarbeida av Rittle-Johnson et al. (2011) som syner fire nivå som elevane må gjennom for å oppnå ønska forståing og kunnskap om likskapsteiknet. Denne modellen er kontinuerleg slik at det vil vere naturleg at elevane kan ha eigenskapar som ligg innanfor fleire nivå samtidig. Eg har også sett på i kva grad ein kan sei om elevane har instrumentell eller relasjonell forståing, i lys av Skemp (2009) sin artikkel. Saman har desse to rammeverka gitt utgangspunktet for å vurdere elevane korleis elevane forstår likskapsteiknet.

5.1 Ekvivalensteikn eller operator?

5.1.1 Definering av likskapsteiknet

Frå analysen ser vi at femteklassingane hovudsakleg definerer likskapsteiknet operasjonelt. Forklaringar som går att er at når likskapsteiknet står der betyr det at ein skal skrive svaret. Fleire av dei nyttar seg av «legg saman alle»-strategien som McNeil og Alibali (2000) skildrar. Dette kan vi tolke som om at dei ikkje forstår tydinga av likskapsteiknet og ikkje har den ønska forståinga av det, som er ei ekvivalensforståing. Ein av elevane i femte klasse definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Alice seier at «er lik» betyr at det skal vere like svar på begge sider..

Ein av åttandeklassingane definerer likskapsteiknet operasjonelt, medan dei to andre kan vise til ei ekvivalenstolking av likskapsteiknet. Dei forklarar at det betyr at det skal vere likt på begge sider av teiknet. Dei viser også gjennom forklaringane sine at dei nyttar seg av ekvivalensen for å samanlikne sidene. Pia, som er den som definerer likskapsteiknet operasjonelt, har ikkje tenkt over kva likskapsteiknet betyr før ho vert spurt om kva det seier ho.

Av dette kan vi sjå at det ser ut til at der er ei utvikling i defineringa av likskapsteiknet frå mellomtrinnsalder til ungdomsskulealder. Funna bygger opp om Kierans (1981) utsegn om at ekvivalenstolkinga av likskapsteiknet kan ta lengre tid å få på plass hos elevar enn ei tolking av likskapsteiknet som eit symbol for å rekne ut eller skrive svaret. Det er likevel ikkje overraskande at funna viser at dei fleste av elevane tolkar likskapsteiknet som ein operator. Dette er i samsvar med det som McNeil et al. (2006) skriv om at mange elevar tolkar likskapsteiknet som eit operasjonelt symbol for å finne totalen eller skrive svaret i staden for eit som eit symbol for matematisk ekvivalens.

5.1.2 Operasjonell forståing eller ekvivalensforståing

Definisjonane som elevane gir oss kan fortelje oss mykje om kva forståing elevane har av likskapsteiknet. Gjennom analysen viser det seg at dei elevane som definerer likskapsteiknet som ein operator også nyttar likskapsteiknet operasjonelt. Dette tolkar eg som at desse elevane har ei operasjonell forståing. I analysen har eg plassert tre av desse elevane inn på nivå éin i rammeverket til Rittle-Johnson et al. (2011). To av desse elevane har eg plassert ein stad mellom nivå to og tre. Ein av dei to er Alice, som gir ein ekvivalensdefinisjon av likskapsteiknet. Likevel nyttar ho likskapsteiknet operasjonelt, for ho er ein av elevane som nyttar seg av «legg saman alle»-strategien i oppgåve 21. Det fortel meg at ein definisjon aleine ikkje gir god nok informasjon om elevane si forståing.

Lise og Even, som definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn, ser ut til å forstå det som eit ekvivalensteikn også. Gjennom forklaringane deira og dei oppgåvene dei kan løyse har eg plassert dei inn mellom nivå tre og fire i Rittle-Johnson et al. (2011) sitt rammeverk. Desse to nivåa skildrar at elevane har relasjonsforståing og at dei kan nytte seg av eigenskapane ved ekvivalens til å samanlikne utsegna på begge sider av likskapsteiknet. Funna i analysen gav ikkje tilstrekkeleg informasjon til å kunne avgjere bestemt kva nivå dei var på.

Funna i analysen viser at dei fleste av elevane har ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, men nokre av dei har utvikla tilstrekkeleg kompetanse slik at dei forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn.

5.1.3 Bør ein vere bekymra for elevar som har ei operasjonell forståing?

Ein kan stille seg spørsmål om det er bekymringsfullt at elevane i femte klasse har ei forståing av likskapsteiknet som operator, når det ser ut til at elevar kan ha fått ei ekvivalensforståing i åttande klasse. Det at dei ikkje forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn i femte klasse er eit teikn på at dei ikkje har nådd kompetansemåla etter 4. årssteg etter læreplanen

(Utdanningsdirektoratet, 2013). Oppgåve 21 er ei likning og det er ikkje forventa at femteklassingane skal kunne løyse ei likning om ein ser på kompetansemåla, men dette er eit mål etter 7. årssteg, og for at dei skal kunne forstå korleis ein løyser i likning treng dei å forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Om vi ser på Pia, som går i åttande klasse, og har ei operasjonell forståing av likskapsteiknet, så trur eg at hennar forståing av likskapsteiknet er ein avgrensande faktor for korleis ho avkodar og les matematiske utsegn. Dette påverkar igjen hennar moglegheit til å forstå nye matematiske konsept der forståinga av likskapsteiknet som ekvivalensteikn er ein føresetnad.

Med dette som eksempel kan det vere grunn til å bekymre seg for elevar med operasjonell forståing dersom dei ikkje viser teikn til å kunne utvikle ei ekvivalensforståing. Korleis ein kan jobbe mot dette kjem eg tilbake til seinare i drøftinga.

5.2 Instrumentell og relasjonell forståing

I analysen kjem det fram at det ikkje er lett å finne ut om elevane har instrumentell eller relasjonell forståing av likskapsteiknet og generelt. For å finne ut meir om det, burde ein kanskje gått meir inngåande inn på somme delar av intervjuet. Likevel gjorde eg funn som kunne seie meg noko om elevane si forståing i dette perspektivet.

Femteklassingane hadde i hovudsak forklaringar og teikn på forståing som kan skildrast som instrumentell etter Skemp (2006) sin definisjon. Det at dei definerer likskapsteiknet operasjonelt er i seg sjølv ein indikator på instrumentell forståing. Den operasjonelle forståinga av likskapsteiknet viser at dei ikkje har forstått alle eigenskapane likskapsteiknet har og alle situasjonane der likskapsteiknet kan nyttast. Av åttandeklassingane var det likeins som med definisjonen og forståinga, ein av dei har tydleg instrumentell forståing, medan to av dei viser fleire teikn som ein kan forstå som at dei er på veg mot ei relasjonell forståing.

Resultata frå analysen viser oss det same som for elevane sine definisjonar av likskapsteiknet. Det ser ut til å vere ein skilnad i kva grad elevar i femte klasse og elevar i åttande klasse viser teikn til relasjonell forståing, der det er langt fleire teikn på relasjonell forståing hos elevane i åttande klasse. Ein faktor som kan spele ei rolle her er den kognitive modninga hos elevane og dei kognitive strukturane som er utvikla hos dei. Dei logiske strukturane som er nødvendige for å koordinere relasjonar bygd på ekvivalens er truleg på plass hos barn i aldersspennet 11-14 år. (Piaget og kollegaer sitert i McNeil et al., 2006, s. 368). Legg ein dette til grunn vil elevane i femte klasse truleg ikkje har gått gjennom den kognitive utviklinga som er nødvendig for å forstå relasjonelt. Det tek truleg lenger tid å opparbeide seg ei relasjonell forståing, då det er mykje lettare å forstå noko instrumentelt skriv Skemp (2006), og elevane i åttande har arbeida med matematikk i undervisningssamanheng i tre år meir enn elevane i femte klasse. Dette kan vi sjå på som ein av faktorane til at vi ser fleire teikn på relasjonell forståing ho elevane i åttande enn hos elevane i femte klasse.

Den relasjonelle forståinga av likskapsteiknet kan utviklast med fleire erfaringar av likskapsteiknet i ulike kontekstar. McNeil og Alibali (2005a) legg fram at ein bør presentere likskapsteiknet i mange ulike situasjonar, og spesielt situasjonar der det ikkje kan tolkast som ein operator for å hindre at elevane berre har operasjonelle erfaringar med likskapsteiknet. Dette kan bidra til at elevane kan sjå nye samanhengar og at dei får utvikla ei meir relasjonell forståing.

Det er spesielt oppgåve 51 som potensielt kunne gitt oss meir informasjon om instrumentell eller relasjonell forståing knytt til likskapsteiknet. For eksempel om elevane tok i bruk «flytt og bytt»-regelen for å løyse oppgåva, ville ein kunne gått vidare frå det for å finne ut om dei visste kvifor dei kunne bruke flytt og bytt regelen. Ein kunne ha fått informasjon om kva elevane veit om mekanismane som ligg bak denne regel slik at den fungerer. Også her kunne ein funne meir informasjon om kva forståing dei har av likskapsteiknet fordi eigenskapane til likskapsteiknet er sentrale i mekanismane bak «flytt og bytt»-regelen. Dessverre er det ikkje fokus på dette i intervjua, og vi har lite datamateriale å støtte oss på sidan berre to av elevane har prøvd å løyse den oppgåva. Kanskje kunne den intervjuaren i samtalen med Even satt av meir tid til å spørje meir om «flytt og bytt»-regelen når Even seier at han prøver å flytte over. I staden for verkar det som om intervjuar vil ha meir fokus på at han skal løyse oppgåva utan å nytte seg av den regelen og leiar Even inn på ein annan framgangsmåte.

Sjølv om det i denne studien har vore utfordrande å finne ut om elevane har instrumentell eller relasjonell forståing, ser eg likevel kva fordelar dei elevane som viser teikn til relasjonell forståing har. Ein av fordelane med å ha relasjonell forståing er at ein kan tilpasse metodar ein har lært tidlegare til nye situasjonar. Dette er noko av det som kjem fram i Even sitt intervju i det han skal løyse oppgåve 51. Han seier han ikkje har løyst likningar med parentesar før, men likevel kjem han fram til løysinga. Vel og merke får han litt hjelp på vegen, men han gir ikkje opp berre fordi oppgåva ser annleis ut enn det han er vandt med frå før. Lise, som også prøver å løyse denne oppgåva, viser at ho prøver å ta i bruk dei teknikkane og metodane ho kan for å løyse denne oppgåva, sjølv om den kanskje er ulik oppgåver ho har jobba med før. Dette signaliserer det som Skemp (2006) skildrar som ein annan fordel ved relasjonell forståing. Det kan vere motiverande å forstå relasjonelt og derfor kan ein søke mot og utforske nye område.

Det kan vere ein av grunnane til at Lise og Even ikkje gir opp når dei ser oppgåve 51, dei synes rett og slett det er spanande å utforske ei oppgåve som dei ikkje har prøvd seg på før og kanskje dei kjenner meistring i det dei greier å kome fram til ei løysing.

I motsetning til desse to har vi Pia som tydleg har vanskar med den matematiske forståinga si. I forklaringane sine og handlingsmønstera sine viser ho tydlege teikn på at ho har instrumentell forståing. Ho syner dette allereie i den første oppgåva der ho bruker lang tid på å kome fram til svaret. Ho blandar $-$ og $+$ i utrekninga si, snur omvendt på tala og viser tydlege teikn på at ho har ei instrumentell forståing av subtraksjonsalgoritmen.

Sjølv om definering av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn i seg sjølv ikkje er ein indikator på relasjonell forståing av det, så ser det her ut til at det er ein samanheng mellom kva definisjon og forståing elevane har av likskapsteiknet og i kva grad dei viser teikn på relasjonell forståing knytt til både likskapsteiknet og elles.

5.3 Elevane sin matematiske kompetanse og matematiske ferdigheiter

Dei av elevane som får til å løyse fleire av oppgåvene kan vi seie har meir matematisk kompetanse enn det dei andre har. Om vi ser opp mot dei tre dimensjonane som Niss og Jensen (2002) skildrar ser vi at dei som kan aktivere dei ulike kompetansane sine i fleire situasjonar, og dermed løyse fleire av oppgåvene, vil ha større aksjonsradius enn dei som ikkje greier å løyse like mange. Dei elevane som størst aksjonsradius kan også løyse meir utfordrande oppgåver og kan nytte kompetansen sin på eit høgare teknisk nivå enn dei som for eksempel berre kan løyse den første oppgåva.

For å løyse oppgåver der tolkinga av likskapsteiknet er avgjerande, er det fleire av kompetansane som Niss og Jensen (2000) skildrar som bør vere tilstrekkeleg utvikla. Frå kunnskapsgrunnlaget har vi at forståinga av likskapsteiknet heng tett saman med symbol- og formalitetskompetansen som omhandlar å kunne avkode og bruke symbol- og formelspråk. Denne kompetansen går også inn i den grunnleggjande ferdigheita «Å kunne lese i matematikk» som er skildra i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013) og omhandlar det å skape meining i matematiske tekstar gjennom å forstå og bruke symbolspråk. Resultata frå analysen gir oss at dei fleste elevane forstår likskapsteiknet operasjonelt og tolkar det som ein operator for å rekne ut eller skrive svaret bak. Ser vi resultata i denne studien opp mot symbol- og formalitetskompetansen og det å kunne lese i matematikk vil manglande utvikling på desse områda kunne vere ein medverkande faktor til at elevane har ei operasjonell forståing av likskapsteiknet.

Kilpatrick et al. (2001) sin matematiske ferdigheit *Forståing* er den som utmerkar seg som mest sentral når ein ser ferdigheitene opp mot likskapsteiknet. Ferdigheita omhandlar det å forstå matematiske omgrep, konsept, operasjonar og relasjonar. Ei operasjonell forståing av likskapsteiknet vil henge saman med at ein ikkje har utvikla ferdigheita godt nok, og dette vil vidare påverke dei andre ferdigheitene som Kilpatrick et al. (2001) skildrar. Dette viser også resultata i analysen i det at dei elevane som har ei operasjonell forståing av likskapsteiknet ikkje har forstått relasjonen som likskapsteiknet symboliserer. Dei får vidare vanskar med å løyse matematiske problem og forklare og reflektere rundt dette.

I læreplanen frå LK06 står det i kompetansemåla etter 4. årssteget under hovudområde *Tal* at elevane skal kunne «…uttrykkje talstorleikar på varierte måtar» og «bruke matematiske symbol og uttrykksmåtar for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Etter 7. årssteget skal elevane kunne «stille opp og løyse enkle likningar og løyse opp og rekne med parentesar i addisjon, subtraksjon og multiplikasjon av tal» (Utdanningsdirektoratet, 2013). Basert på dette så skal ein kunne forvente at elevane i åttande klasse skal greie å løyse oppgåve 21 utan problem og også kanskje 51 i oppgåvesettet. Likevel må ein sjå på det som mogleg for femteklassingane å kunne løyse desse oppgåvene då dei får oppgitt svaralternativ, og kan då bruke det dei kan om likskap for å teste alternativ for å finne svaret.

Av femteklassingane er det berre Espen som greier å løyse oppgåve 21 utan å få forklart at likskapsteiknet tyder at det skal vere likt på begge sider. Ut frå kompetansemåla etter 4. årssteget skulle ein kunne forvente dei andre også skulle kunne løyse den oppgåva. Sidan det står i kompetansemåla at dei skal kunne bruke matematiske symbol for å uttrykkje matematiske samanhengar i oppgåveløysing må vi her knytte dette opp mot likskapsteiknet, og at dei skal forstå at likskapsteiknet i oppgåve 21 seier at $14 - 5$ har same verdi som eit ukjent tal $+ 2$. Det at tre av dei fire femteklassingane i utvalet ikkje greier å kome fram til svaret på eiga hand, og treng rettleiing for å kome fram til svaret er interessant. Det at dei med rettleiing kan kome fram til svaret og at nokre av dei kan sjå ut til å skjøne at det skal vere likt på begge sider viser at forståinga av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn er i deira proksimale utviklingssone. Det vil, med bakgrunn i Vygotskij (1987) sin teori, vere oppnåeleg for elevane å forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn og dei vil ha potensiale til å kunne løyse likningar med operasjonar på kvar side av likskapsteiknet.

Av åttandeklassingane greier to av dei tre å løyse likninga i oppgåve 21. At dei kan løyse denne oppgåva ikkje nok grunnlag til å konkludere om elevane har nådd kompetansemåla etter 7.årssteget, men det kan fortelje oss at det ser ut til at desse to kan greie å løyse enkle likningar med ein operasjon på kvar side av likskapsteiknet. Det viser også at dei då må ha nådd somme av dei tidlegare kompetansemåla i læreplanen, då likningsløysing i stor grad baserer seg på å bruke kunnskap om representasjon av talverdiar og riktig bruka av notasjon, symbol og rekneteknikkar. Her spesielt kunnskap om likskapsteiknet som symbol og kva det tyder i denne samanhengen. Pia er den som ikkje får til oppgåve 21 på eiga hand. Ho strever med oppgåva og må ha rettleiing for å få den til. Dette viser tydleg at der er mangel på kompetansen som ho skulle hatt gitt av kompetansemåla etter 7. årssteget. Likevel er kompetansane som krevst for å løyse oppgåve 21 innan Pia sin proksimale utviklingssone, og dermed vil ei utvida forståing av likskapsteiknet også vere innanfor det Pia har potensiale til å meistre.

5.4 Undervisning av ekvivalens og bruken av likskapsteiknet i grunnskulen

Av det som kjem fram i analysen bør ein stille spørsmål ved undervisninga av likskap og likskapsteiknet. Kvifor er det få av elevane som kan reflektere rundt kva likskapsteiknet tyder? Kvifor vil dei fleste av dei tolke det som ein operator? Som nemnt i kunnskapsgrunnlaget er det lite forsking som er gjort på lærarar si forståing av likskap og likskapsteiknet, men eg vil likevel drøfte nokre av funna mine opp mot noko av den forskinga som eksisterer og Ball et al. (2008) sine domene innan matematisk kunnskap for undervisning.

For å finne svar på kvifor den operasjonelle tolkinga av likskapsteiknet står så sterkt hos elevane burde ein kanskje ha studert korleis lærarane deira har undervist om likskap og korleis lærarane har nytta likskapsteiknet i matematikkundervisninga. Det kunne då blitt avdekka om lærarane si undervisning har hatt noko å sei for den misoppfatninga av likskapsteiknet som gjer at elevane i utgangspunktet berre nyttar det som ein operator. I studien til Vermeulen og Meyer (2017) kom det fram at lærarane ikkje var klar over at måten elevane deira oppfatta likskapsteiknet på ville kunne forhindre dei i vidare arbeid med matematikk. Lærarane mangla òg strategiar for å forhindre desse misoppfatningane. Dette kan vi sjå opp mot funna til McNeil og Alibali (2005a) frå amerikanske matematikktimar der det sjeldan var fokus på meininga med likskapsteiknet, og elevane i stor grad sjølv måtte konstruere tolkinga si av likskapsteiknet på eigne erfaringar. McNeil og Alibali (2005a) meiner at dette kan ver ein grunn til at mange elevar tolka likskapsteiknet som ein operator. Funna i utanlandske studiar kan ikkje direkte overførast til norske forhold, men truleg er det store nok likskapstrekk til at ein kan legge dei til grunn for tolking av resultata i denne studien. Det kan då tenkast, basert på funna i mi studie, at ein av grunnane til at femteklassingane ikkje har utvikla ei riktig tolking og forståing av likskapsteiknet er lite fokus på meininga med likskapsteiknet i undervisning.

Fitzmaurice et al. (2018) undersøkte irske lærarstudentar si forståing av lineær algebra og løysing av lineære likningar og fann ut at fleire av studentane ikkje hadde utvikla ei relasjonell forståing av likningsløysing. Ein faktor i manglande forståing for likningsløysing kan vere mangelfull eller manglande forståing av kva rolle likskapsteiknet spelar i den samanhengen. Sett opp mot Ball et al. (2008) sin konklusjon om at lærarar med manglande forståing for faget ikkje vil ha kunnskapen som er nødvendig for å lære vekk det faglege innhaldet til elevane kan ein stille spørsmål om korleis mangel på relasjonell forståing hos lærarstudentar vil påverke den undervisninga dei skal utføre i framtida. Det hadde vore interessant å undersøkt det same hos norske matematikklærarstudentar og matematikklærarar for å sjå om ein fann liknande resultat.

Som presentert i innleiinga viser resultata frå dei siste TIMSS-studiane at norske elevar skårar lågt på emneområdet *Algebra*. Rapportane (Bergem et al., 2016; Grønmo et al., 2017; Grønmo et al., 2012) som er skrive i samband med desse konkluderer med at det kan vere eit utrykk for at ein ikkje ser på algebra som så viktig å undervise i norsk skule. Rapportane nemner også at algebra er noko av det mest grunnleggjande innan matematikk fordi det dannar grunnlaget for vidare læring. I læreplanane står det ikkje nemnt algebra før kompetansemåla etter 7. årssteget, som viser at algebra kjem inn matematikkundervisninga til elevane først når dei kjem på mellomtrinnet. Vi kan sjå dette opp mot det Ball et al. (2008) kallar *Horizon content knowledge* og at lærarane må vere bevisste i at det dei underviser på eit trinn vil vere eit grunnlag for noko som skal lærast og forståast seinare. Dersom norske lærarar ikkje greier å trekke liner mellom tal og talrekning i begynnaropplæringa og algebraen som dei møter på seinare, er det nærliggande å tru at dette kan vanskeleggjer læring av algebra for somme elevar.

Vi ser i analysen at det er ein av åttandeklassingane som skil seg ut av dei tre som er med i utvalet. Pia manglar tilstrekkeleg til kompetanse til å løyse likningsoppgåvene og ho viser manglande forståing av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Dei to andre greier fint å løyse oppgåve 21 og får til oppgåve 51 med litt hjelp og rettleiing. Det dei to andre også viser er at dei forstår likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. Åttandeklassingane er elevar ved tre forskjellige skular og truleg kjem dei frå tre ulike barneskular før dei starta i åttande. Dermed har dei hatt ulike lærarar opp gjennom skulegangen. Ein kan undre seg om Pia si manglande forståing skuldast at ho har hatt ein lærar som ikkje har hatt god nok matematisk kunnskap for undervisning, eller om det er andre faktorar som gjer dette. Det hadde vore interessant å sett om det har vore store skilnadar i måten lærarane deira har undervist på og i kva grad elevane har samtala om likskapsteiknet i opplæringa si. Truleg er ikkje Pia spesiell i det å ikkje forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn i åttande klasse. Ser ein på resultata frå TIMSS-studien, der norske elevar skårar lågt innan algebra, vil det truleg vere fleire elevar i norsk skule som har mangelfull forståing knytt opp mot likskapsteiknet.

For at lærarar skal kunne avdekke og rette opp misoppfatningar hos elevane er det naudsynt at dei har god matematisk kunnskap for undervisning (Vermeulen & Meyer, 2017). Det er ikkje tilstrekkeleg at matematikklærarane kan utføre matematiske operasjonar og berekningar som dei skal undervise om, men dei må også forstå kvifor dei kan nytte seg av ulike operasjonar i ulike situasjonar og kvifor det fungerer som det gjer. Lærarane treng det Skemp (2006) seier er relasjonell forståing i matematikk, saman med ein godt utvikla matematisk kompetanse. Lærarane må også forstå korleis elevar kan forstå eller misforstå, og dei må evne å velje den undervisningsforma som vil gje elevane best læringsutbytte og forståing om det dei skal lære.

Ser vi meir på intervjuet av Pia så spør intervjuar henne om kva «er lik» tyder. Pia svarar at ho ikkje har tenkt på det. Her må intervjuar då bruke sin kunnskap om innhald og elevar (Ball et al., 2008) og tenke over kva misoppfatningar som er vanlege hos elevar i samband med likskapsteiknet. Då endrar intervjuar måten han stiller spørsmålet på. Han spør om kva ho tenker når ho ser eit likskapsteikn, og på den måten får han eit svar som gir han meir informasjon om det han ønsker å vete. Intervjuar må også tenke seg om når han vidare formulerer seg om kva likskapsteiknet kan bety. I intervjuet av Pia er intervjuar påpasseleg med å anerkjenne hennar forklaring slik at han ikkje avfeiar henne før han legg fram ei anna tolking av likskapsteiknet. På denne måten utvidar han kanskje Pia sin kunnskap om likskapsteiknet utan å underminere det ho allereie veit om likskapsteiknet. Det kan vere tenleg for lærarar å arbeide med elevar på same viset i undervisninga si for å avdekke manglar og rette opp i feil knytt til forståinga av likskapsteiknet.

I tidlegare forsking (m.a. Falkner et al., 1999; McNeil & Alibali, 2005a; McNeil et al., 2006) kjem det fram at med riktig undervisning kan elevar utvikle ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet. Falkner et al. (1999) finn indikasjon på at elevane gjennom diskusjon har lært å sjå på likskapsteiknet som eit symbol for ein relasjon heller enn eit teikn for å rekne ut. Ein ser også i intervjua at når intervjuaren forklarer til elevane at det skal vere likt på begge sider av likskapsteiknet greier dei fleste elevane å løyse oppgåva med rettleiing. McNeil og Alibali (2005a) og McNeil et al. (2006) peikar på at undervisninga må innehalde oppgåver eller situasjonar der likskapsteiknet må tolkast som eit ekvivalensteikn og ikkje berre situasjonar der ein berre treng å nytte den operasjonelle sida av likskapsteiknet. Her kan også lærebøkene som er nytta i undervisninga spele ei rolle i dei erfaringane elevane får med likskapsteiknet. Vi kan sjå på Alice som definerer likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn men nytter likskapsteiknet som ein operator i oppgåvene. Dette kan tyde på at ho har fått fortalt og klargjort at likskapsteiknet symboliserer ekvivalens. Det må også bety at det har blitt presisert i ei slik grad at forklaringa har satt seg så godt at ho kan vidareformidle definisjonen. Bruken av likskapsteiknet som operator vitnar derimot om at ho ikkje har forstått definisjonen som ho sjølv brukar, og det kan tenkast at ho ikkje har fått erfare likskapsteiknet i kontekstar som underbygger ekvivalensdefinisjonen. Dette gjer at eg også stiller meg spørsmål om kva lærebøkene legg opp til av undervisning om likskapsteiknet.

6 Avslutning

For å svare på forskingsspørsmålet mitt; *Korleis forstår nokre elevar frå mellomtrinnet og ungdomstrinnet likskapsteiknet?* har eg analysert elevane sine svar og betraktningar som kjem fram i dei oppgåvebaserte intervjua.

I analysen og drøftinga har eg sett at den operasjonelle forståinga av likskapsteiknet er godt etablert hos alle elevane. Alle elevane greier å løyse oppgåve 5 der ein skal rekne ut svaret. I den oppgåva er det tilstrekkeleg å tolke likskapsteiknet som ein operator for å rekne ut og løyse den. Oppgåve 21 viste seg å kunne gi meg meir svar om forståinga då den oppgåva krev at ein forstår ekvivalensen som likskapsteiknet symboliserer. Elevane i femte klasse forstår likskapsteiknet hovudsakleg operasjonelt og nytter seg i stor grad av ukorrekte strategiar som støttar opp under ei operasjonell forståing. I forklaringane til elevane kjem det fram at fleire av dei tenker «då skal eg skrive svaret» når dei ser likskapsteiknet. Eg har vurdert det til at dei også har det Skemp (2006) skildrar som instrumentell forståing. Av dei tre elevane på åttande trinn har eg vurdert det til at to stykk har ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet og samtidig viser tydlege teikn på at dei har ei forståing som peikar i retning relasjonell ut frå rammeverket bygd på Skemp (2006) sine skildringar. Desse funna gir oss ein indikasjon om at det for fleire elevar kan skje ei utvikling i forståinga frå mellomtrinnet til ungdomstrinnet. Dette kan underbyggast med den kognitive utviklinga som skjer i elevane i alderen 11-14 år som kan bidra til at det er enklare å forstå (Piaget og kollegaer sitert i McNeil et al., 2006, s. 368), og det faktum at det kan ta lengre tid å utvikle ei relasjonell forståing (Skemp, 2006).

Fleire av elevane viser teikn til at dei med rettleiing kan løyse fleire oppgåver enn utan. Dette er eit teikn på at dei er opne for å tileigne seg meir kunnskap om likskapsteiknet, og kanskje ei utvida og meir relasjonell forståing av det. Ei utvida forståing vil ligge innafor elevane si proksimale utviklingssone. Eg vil derfor seie at ei operasjonell og instrumentell forståing av likskapsteiknet vil vere ein avgrensande faktor for elevane si vidare læring og forståing dersom dette ikkje vert oppdaga og dei får den støtta som trengs.

Ut frå dei kompetansemåla som er gitt i læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2013) kan ein tolke det slik at elevane skal ha ei ekvivalensforståing av likskapsteiknet dersom måla er nådd. Funna i analysen viser at det truleg er fleire av elevane som ikkje har nådd desse måla. Kva den manglande måloppnåinga skuldast finn eg ikkje noko svar på i denne oppgåva, men det er mogleg at noko av det kan skuldast at den operasjonelle forståinga, som ofte er tilstrekkeleg på lågare årstrinn, vil vere avgrensande i å nå måla.

Igjen vil eg påpeike at resultata som kjem fram i denne oppgåva ikkje kan sei noko om *alle* elevar si forståing av likskapsteiknet, men dei fortel oss korleis elevane i dette utvalet forstår det. Sidan resultata her fortel oss korleis *nokre* elevar forstår likskapsteiknet vil funna antakeleg gjelde fleire elevar enn dei som er med i utvalet, sidan ingen av elevane markant skil seg ut i den eine eller andre retninga på skalaen.

6.1 Frampeik og vidare forsking

Funna i denne oppgåva tyder på at det ikkje vert arbeida med likskapsteiknet i småskulen på ein slik måte at det gir elevane ei forståing av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn. I funna kjem det fram at elevane i femte klasse i hovudsak forstår likskapsteiknet som ein operator og at dei skal skrive svaret når dei ser likskapsteiknet. Basert på tidlegare forsking (m. a. Baroody & Ginsburg, 1983; Carpenter et al., 2003; Falkner et al., 1999) er det fullt mogleg for dei yngste elevane å forstå likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn dersom dei får erfaringar med dette. Det er også mogleg at elevar med operasjonell forståing av likskapsteiknet kan med utvikle ei forståing av likskapsteiknet som eit ekvivalensteikn med undervisning som fremmer desse eigenskapane ved likskapsteiknet.

Det som då står igjen som eit tydeleg spørsmål for meg etter å ha arbeidd gjennom denne oppgåva er: *Korleis arbeidar vi med likskapsteiknet i begynnaropplæringa i matematikk?* Dette kan vere interessant å forske på i både stor og liten skala for å sjå om dette har innverknad på korleis elevane forstår likskapsteiknet.

6.2 Personleg refleksjon

Gjennom oppgåva har eg fått eit nytt syn på matematisk forståing og kompetanse. Eg ser enda tydlegare no at det inneber så mykje meir enn det å vere god på å kome fram til eit svar.

Eg har sett at mange elevar forstår meir enn det synes gjennom oppgåveløysing og at ein må samtale med elevane for å få ei større forståing av kva elevane kan. Dette finne eg støtte i hos Opsal (2020) som konkluderer med at fleirvalsoppgåver gir oss lite informasjon om elevane si forståing av innhaldet i oppgåva. Det å vere munnleg i matematikk er noko eg prøver å arbeide med i klasserommet mitt, men som eg ser at eg bør jobbe enda meir med framover. Dette fordi ein kan avdekke langt meir om elevane si forståing av det vi lærer dei, enn det å sjå om dei kan løyse oppgåvene. Eg trur også elevane mine vil ha eit langt større utbytte av dette, og kanskje oppnå større forståing for langt meir enn dei gjer om ikkje.

Noko anna eg skal ta med meg vidare er det å vere bevisst korleis eg nyttar min matematiske kunnskap i undervisninga mi. I ein hektisk arbeidskvardag kan det vere lett å berre stø seg på ei lærebok og vise dei oppgåvene som er gitt der til elevane, utan eigentleg å tenke gjennom om desse oppgåvene er gode nok til å bidra til læring hos elevane. Framover kjem eg til å vektlegge dette i større grad enn før, og også i forkant av oppstart av nytt tema gå gjennom og tenke over kva oppfatningar og misoppfatningar det kan vere lett at elevane tileignar seg. Ein siste ting som eg vidare vil vere meir bevisst på er korleis eg ordlegg meg i undervisninga. Dette relatert til korleis eg nytter symbol og snakkar om desse til elevane.

6.3 Svakheiter i studien

Eit av punkta der ein kan vere kritisk til denne oppgåva sin validitet er gjennomføringa av intervjua. Eg ville ha kunna sikra validiteten av oppgåva i langt større grad om eg hadde gjennomført intervjua sjølv.

For å få fram kva det var elevane tenkte var det i fleire av intervjua at intervjuar måtte forklare og rettleie. I prosjektet der datainnsamlinga vart gjennomført var det tre forskarar som bidrog i intervjua. Eg kjenner ikkje forskarane sin bakgrunn eller matematiske kunnskap for undervisning i den grad at eg kan sei kva dei har tenkt om korleis elevane tenker eller forstår rundt dei forklaringane som dei gir. Dette kan ha påverka resultata i den grad at det kanskje ikkje er kome fram så mykje informasjon som ein kunne ha fått tak i dersom eg visste kva som låg bak spørsmåla deira eller om dei uttrykte seg eller ordla seg på ein annan måte slik det kom tydlegare fram i intervjua.

Ei anna side ein kan sjå på som ein svakheit er talet på informantar og oppgåver. Utvalet er relativt lite og det vil truleg ikkje vere representativt for det store elevmangfaldet i norsk skule. Oppgåvene som er nytta i analysen er valt ut fordi det var dei eg kunne nytte til drøfte rundt forskingsspørsmålet som var tilgjengelege for meg i datamaterialet. Det kan vere at med andre rekneoppgåver ville ein kunne fått fram andre eller meir varierte resultat enn det som kjem fram av analysen her.

Litteraturliste

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Baroody, A. J. & Ginsburg, H. P. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. *The Elementary school journal, 84*(2), 199-212. https://doi.org/10.1086/461356

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Oslo: Cappelen Damm akademisk.

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein & T. Nilsen (Red.), *Vi kan lykkes i realfag* (s. 22-43). Oslo: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Bergem, O. K., Kaarstein, H. & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Oslo: Scandinavian University Press (Universitetsforlaget).

Brinkmann, S. (2014). Unstructured and Semi-Structured Interviewing. I P. Leavy (Red.), *Oxford Handbook of Qualitative Research* (s. 277-299). Cary: Oxford University Press, Incorporated.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.

Christoffersen, L. & Johannessen, A. (2012). *Forskningsmetode for lærerutdanningene*. Oslo: Abstrakt forlag.

Darr, C. (2003). The meaning of "equals". *set: Research Information for Teachers, 2003*(2), 4-7. https://doi.org/https://doi.org/10.18296/set.0686

Falkner, K. P., Levi, L. & Capenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*, 232-236.

Fitzmaurice, O., O'Meara, N., Johnson, P. & Lacey, S. (2018). 'Crossing' the equals sign: insights into pre-service teachers' understanding of linear equations. *Asia-Pacific journal of teacher education, 47*(4), 361-382. https://doi.org/10.1080/1359866x.2018.1539216

Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing Mathematical Problem Solving through Task-Based Interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 9*, 40-177. https://doi.org/10.2307/749946

Grønmo, L. S., Hole, A. & Onstad, T. (2017). Hovedresultater i matematikk i TIMSS Advanced, TIMSS og PISA. I L. S. Grønmo & A. Hole (Red.), *Prioritering og progresjon i skolematematikken : en nøkkel til å lykkes i realfag : analyser av TIMSS Advanced og andre internasjonale studier* (s. 31-44). Oslo: Cappelen Damm Akademisk.

Grønmo, L. S., Onstad, T., Nilsen, T., Hole, A., Aslaksen, H. & Borge, I. C. (2012). *Framgang, men langt fram : norske elevers prestasjoner i matematikk og naturfag i TIMSS 2011*. Oslo: Akademika.

Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner - Metamatematikk for lærerutdanningen*. Bergen: Caspar Forlag.

Haug, P. (2017). *Spesialundervisning : innhald og funksjon*. Oslo: Samlaget.

Hill, H. C., Rowan, B. & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American educational research journal, 42*(4), 371.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics, 1-468. https://doi.org/10.17226/9822

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. & Alibali, M. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for research in mathematics education, 37*(4), 297-312.

Kunnskapsdepartementet. (2003-2004). *Kultur for læring* (St.meld. nr. 30 (2003-2004)). Henta frå https://www.regjeringen.no/no/dokumenter/stmeld-nr-030-2003-2004-/id404433/

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (3. utg.). Oslo: Gyldendal akademisk.

Likhetstegn. (2017). I *Store Norske Leksikon*. Henta 3. september frå https://snl.no/likhetstegn

Maxwell, J. A. (1992). Understanding and validity in qualitative research. *Harvard Educational Review, 62*(3), 279.

McNeil, N. & Alibali, M. (2000). Learning mathematics from procedural instruction: Externally imposed goals influence what is learned. *Journal of Educational Psychology, 92*, 734-744. https://doi.org/10.1037/0022-0663.92.4.734

McNeil, N. & Alibali, M. (2005a). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. *Journal of Cognition and Development, 6*(2), 285-306. https://doi.org/10.1207/s15327647jcd0602_6

McNeil, N. & Alibali, M. (2005b). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Dev, 76*(4), 883-899. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M., Stephens, A. C., Hattikudur, S. & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction, 24*(3), 367-385. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2403_3

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring : ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. København:

Undervisningsministeriet. Henta frå http://static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom/hel.pdf

Opsal, H. (2020). Tekstoppgåve som fleirvalsoppgåve. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 31*(3), 44-53. Henta frå http://www.caspar.no/tangenten/2020/tangenten%203%202020%20Opsal.pdf

Rittle-Johnson, B., Matthews, P., Taylor, R. & McEldoon, K. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A Construct-Modeling Approach. *Journal of Educational Psychology, 103,* 85-104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88-95.

Thagaard, T. (2018). *Systematikk og innlevelse : en innføring i kvalitative metoder* (5. utg.). Bergen: Fagbokforlaget.

Utdanningsdirektoratet. (2013). *Læreplan i matematikk fellesfag* (MAT1-04). Henta frå http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)* ((MAT01-05)). Henta frå https://data.udir.no/kl06/v201906/laereplaner-lk20/MAT01-05.pdf?lang=nno

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002). *According to the Book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vermeulen, C. & Meyer, B. (2017). The Equal Sign: Teachers' Knowledge and Students' Misconceptions. *African journal of research in mathematics, science and technology education, 21*(2), 136-147. https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Vedlegg

Vedlegg 1 – Oppgåvesett 2

Sett 2:

Namn: ______________________________ Klassesteg: __________

5. Regn ut 275 - 84 = Vet ikke ☐

267	191	359	19	199	351
☐	☐	☐	☐	☐	☐

21. Hvilket tall må skjule seg bak smilefjeset for at regnestykket (ligningen) skal være riktig?

14 – 5 =  + 7 Vet ikke ☐

7	12	0	16	2	9
☐	☐	☐	☐	☐	☐

22. Et tegneserieblad kommer ut 6 ganger i året og koster 35 kr per blad.
Et årsabonnement koster 170 kr. Hvor mye billigere er det å abonnere enn å kjøpe 6 blad enkeltvis? Vet ikke ☐

170 kr	35 kr	135 kr	1020 kr	210 kr	40 kr
☐	☐	☐	☐	☐	☐

33. Ali, Per og Trude solgte til sammen 95 lodd. Per solgte 15 lodd, Trude solgte dobbelt så mange som Per. Hvor mange lodd solgte Ali? Vet ikke ☐

45	50	80	110	60	75
☐	☐	☐	☐	☐	☐

33. Ali, Per og Trude solgte til sammen 105 lodd. Per solgte 15 lodd, Trude solgte dobbelt så mange som Ali. Hvor mange lodd solgte Ali? Vet ikke ☐

45	30	90	120	60	15
☐	☐	☐	☐	☐	☐

51. Hva er den riktige løsningen av denne ligningen:

$$3(x-1)-2=x+3$$

Vet ikke ☐

$x = 4$	$x = 2$	$x = 8$	$x = \frac{1}{4}$	$x = 0$	$x = \frac{2}{5}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

Vedlegg 2 – Svar frå NSD Personvernombodet i samband med datainnsamlinga

Hilde Opsal
Postboks 500
6101 VOLDA

Vår dato: 09.02.2018	Vår ref: 58256 / 3 / HIT	Deres dato:	Deres ref:

Vurdering fra NSD Personvernombudet for forskning § 31

Personvernombudet for forskning viser til meldeskjema mottatt 10.01.2018 for prosjektet:

58256	*Talforståing hos elevar - oppfølging av SPEED-prosjektet*
Behandlingsansvarlig	*Høgskulen i Volda, ved institusjonens øverste leder*
Daglig ansvarlig	*Hilde Opsal*

Vurdering

Etter gjennomgang av opplysningene i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon finner vi at prosjektet er meldepliktig og at personopplysningene som blir samlet inn i dette prosjektet er regulert av personopplysningsloven § 31. På den neste siden er vår vurdering av prosjektopplegget slik det er meldt til oss. Du kan nå gå i gang med å behandle personopplysninger.

Vilkår for vår anbefaling

Vår anbefaling forutsetter at du gjennomfører prosjektet i tråd med:
•opplysningene gitt i meldeskjemaet og øvrig dokumentasjon
•vår prosjektvurdering, se side 2
•eventuell korrespondanse med oss

Vi forutsetter at du ikke innhenter sensitive personopplysninger.

Meld fra hvis du gjør vesentlige endringer i prosjektet

Dersom prosjektet endrer seg, kan det være nødvendig å sende inn endringsmelding. På våre nettsider finner du svar på hvilke endringer du må melde, samt endringsskjema.

Opplysninger om prosjektet blir lagt ut på våre nettsider og i Meldingsarkivet

Vi har lagt ut opplysninger om prosjektet på nettsidene våre. Alle våre institusjoner har også tilgang til egne prosjekter i Meldingsarkivet.

Vi tar kontakt om status for behandling av personopplysninger ved prosjektslutt

Ved prosjektslutt 30.06.2021 vil vi ta kontakt for å avklare status for behandlingen av personopplysninger.

NSD – Norsk senter for forskningsdata AS | Harald Hårfagres gate 29 | Tel: +47-55 58 21 17 | nsd@nsd.no | Org.nr. 985 321 884
NSD – Norwegian Centre for Research Data | NO-5007 Bergen, NORWAY | Faks: +47-55 58 96 50 | www.nsd.no

Se våre nettsider eller ta kontakt dersom du har spørsmål. Vi ønsker lykke til med prosjektet!

Marianne Høgetveit Myhren

Hildur Thorarensen

Kontaktperson: Hildur Thorarensen tlf: 55 58 26 54 / hildur.thorarensen@nsd.no

Vedlegg: Prosjektvurdering

Personvernombudet for forskning

Prosjektvurdering - Kommentar

Prosjektnr: 58256

Du har opplyst i meldeskjema at utvalget vil motta skriftlig informasjon om prosjektet, og samtykke skriftlig til å delta. Vår vurdering er at informasjonsskrivet til utvalget er godt utformet.

Selv om barnets foresatte samtykker til barnets deltakelse i prosjektet, må også barnet gi sin aksept til å delta. Vi anbefaler at barnet mottar tilpasset informasjon om hva deltakelse i prosjektet innebærer. Du må sørge for at barnet forstår at deltakelse er frivillig, og at det kan trekke seg om det ønsker det.

Personvernombudet forutsetter at du behandler alle data i tråd med Høgskulen i Volda sine retningslinjer for datahåndtering og informasjonssikkerhet.

Prosjektslutt er oppgitt til 30.06.2021. Det fremgår av meldeskjema og informasjonsskriv at videoopptak vil kunne lagres på ubestemt tid for bruk i videre forskning og undervisning, der det er innhentet samtykke til dette.

Øvrig materiale vil anonymiseres. Anonymisering innebærer vanligvis å:
- slette direkte identifiserbare opplysninger som navn, fødselsnummer, koblingsnøkkel
- slette eller omskrive/gruppere indirekte identifiserbare opplysninger som bosted/arbeidssted, alder, kjønn

For en utdypende beskrivelse av anonymisering av personopplysninger, se Datatilsynets veileder: https://www.datatilsynet.no/globalassets/global/regelverk-skjema/veiledere/anonymisering-veileder-041115.pdf

Vedlegg 3 – Informasjonsskriv og samtykkeskjema

HØGSKULEN I VOLDA

Avdeling for humanistiske fag og lærarutdanning

Spørsmål om deltaking i forskingsprosjekt til elevar i 5. klasse på yy skole.

Vi er tre forskarar ved Høgskulen i Volda som ønskjer å finne ut korleis elevar løyser matematikkoppgåver. For å kunne finne ut dette vil vi intervjue elevar i 5. klasse. I intervjuet får dei matematikkoppgåver dei skal løyse og fortelje oss korleis dei har løyst oppgåvene. Vi ønskjer å intervjue dei same elevane om 1–2 år for å finne ut kva matematikk elevane har lært i mellomtida.

Vi håpar du vil vere med på dette prosjektet. For å få med alt som blir sagt og skrive under intervjua tek vi opp lyd og video. Vi filmar ikkje ansiktet ditt. Berre forskarane i prosjektet får høyre lydopptaka og sjå videoane medan vi analyserer dei. Det er også berre forskarane som får vite namnet ditt. Vi har teieplikt. Høgskulen i Volda er ansvarleg for innsamla data vert handsama sikkert, og prosjektet er meldt til Personvernombudet for forskning. Prosjekter vert avslutta i juni 2021.

Vi ønskjer å lagre delar av lydopptak og videofilmar på ein server på Høgskulen i Volda slik at vi kan bruke dei til forsking seinare. Vi ønskjer også å vise videopptak i undervisinga til lærarstudentar eller på forskingskonferansar. Dersom du synest det er greitt, kan du krysse av for det på neste side. Når prosjektet er slutt kan du, dersom du vil, få høyre og sjå opptaka som vi skal lagre vidare. Dersom du ikkje vil at vi skal lagre/bruke lydopptak/video etter at prosjektet er slutt så slettar vi det. Alt datamateriale, utanom dei opptak vi har fått lov til å lagre for vidare arbeid blir då anonymisert. Det vil ikkje vere mogeleg å vite kven du er på det som vert skrive frå prosjektet.

Det er frivillig å delta i prosjektet. Du kan trekke deg undervegs utan å gi noko grunn for det, også om du har sagt at du vil vere med. Namnet ditt og alle opptaka blir då sletta. Det er også mogeleg å trekke seg frå vidare lagring av opptak etter at prosjektet er avslutta. Det vil ikkje få nokon konsekvens for deg i forhold til lærar/skule dersom du ikkje deltek eller seinare ynskjer å trekke deg frå studiet.
Vi håpar de vil vere med på dette prosjektet. Dersom de er noko de lurer på, kan Hilde Opsal kontaktast på tlf. 7007 5339 eller e-post hilde.opsal@hivolda.no

Venleg helsing

Hilde Opsal
Prosjektleiar, Høgskulen i Volda

Postboks 500
6101 Volda
tlf. 70 07 50 00

Besøksadresse
Joplassvegen 11
6103 Volda

postmottak@hivolda.no
hivolda.no

HØGSKULEN I VOLDA

Samtykkeerklæring

Avdeling for humanistiske fag og lærarutdanning

Eg ynskjer å delta i forskingsprosjektet ______________________________

Eg er samd i at min son/dotter ______________________________
kan delta i dette prosjektet

______________ ______________________________

Dato Signatur

Eg godkjenner at lyd-/videoopptak kan lagrast på ubestemt tid til bruk i forsking ved Høgskulen i Volda ☐

Eg godkjenner at lyd-/videoopptak kan brukast til presentasjon på konferansar og til undervisning ☐

Postboks 500
6101 Volda
tlf. 70 07 50 00

Besøksadresse
Joplassvegen 11
6103 Volda

postmottak@hivolda.no
hivolda.no