Masteroppgave

Elevers misoppfatninger knyttet til brøk

En studie av elevers misoppfatninger; utbredelse og sammenhenger

Stine-Mari Sjøholt

Master i Grunnskolelærerutdanning

Matematikkdidaktikk

2022

Antall ord:27492

HØGSKULEN I VOLDA

Forord

For fem år siden tok jeg et valg om å sette meg på skolebenken igjen. Det var starten på en utrolig reise hvor jeg har lært mye, men også utviklet meg som menneske. Masteroppgaven er den siste etappen mot å være ferdig utdannet, og målstreken er så nær. De siste månedene har vært harde, men lærerike. Det som startet med et feltarbeid på fjerdeåret, viste seg å bli temaet for min masteroppgave. Matematikk har alltid vært et av mine favorittfag, og det er takket være mange av de lærerne jeg har hatt opp gjennom årene. De er grunnen til at jeg startet denne reisen. Det var derfor helt naturlig for meg å fortsette med det, men også få gå mer i dybden på emner som interesserer meg.

Jeg vil benytte denne anledningen til å takke de skolene og de elevene som har deltatt i studien. Uten dem ville det ikke vært mulig å gjennomføre dette prosjektet. Med en positiv innstilling og en entusiasme for prosjektet, så følte jeg meg godt tatt imot hos de ulike skolene. Jeg er veldig takknemlig for at de gjorde dette mulig. Jeg må også få takke min veileder, Arve Fiskerstrand, som har vært til stor hjelp gjennom hele prosessen. Det har vært gode diskusjoner, samt gode konstruktive tilbakemeldinger som har satt ting i perspektiv. Dette har vært viktig for hvordan oppgaven har blitt formet.

Sist, men ikke minst, vil jeg takke mine nærmeste. En stor takk til min familie og venner, som har støttet og hatt tro på meg gjennom hele prosessen. Den største takken går til min kjære samboer Raymond. Man setter så utrolig stor pris på den støtten man får, til tross for at man til tider er fraværende. En masteroppgave krever tid, og det har gått mange timer til å samle data, analysere og skrive. Nå ser jeg frem til å tilbringe mer tid med min kjære, og jeg ser frem til å begynne i jobben som lærer.

Skodje, mai 2022

Stine-Mari Sjøholt

Sammendrag

Denne studien ser på misoppfatninger knyttet til brøkforståelse. Tidligere studier indikerer at elevers brøkforståelse er essensielt for forståelse og prestasjoner innen matematikk i videre skoleløp (Bailey et al., 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012; Tsai & Li, 2017). Hensikten med studien har vært å undersøke sammenhenger og utbredelse av misoppfatninger knyttet til brøk hos elever på 5. trinn. Studien tar utgangspunkt i forskningsspørsmålene: *Hvilken misoppfatning knyttet til brøk ser man mest av på 5.trinn? Hvilke sammenhenger kan man finne mellom misoppfatningene?*

Studien er en mixed-methods studie, med en *explanatory-sequential approach.* Her vektlegges det kvantitative, men følges opp av en forklaring gjennom kvalitativ data. Ved å bruke mixed-methods kan man få en bredere og mer fullstendig forståelse av det fenomenet man undersøker. Studiens datamateriale er hentet fra utvalg av elever fra 5. trinn, med 91 elever fra fire ulike skoler. Den kvantitative dataen er samlet inn ved bruk av et oppgavesett. Resultatet og elevenes besvarelser av oppgavesettet la grunnlaget for kvalitative forskningsintervju. Hensikten med intervjuene var å få dypere forståelse for elevenes besvarelser og få et innblikk i elevenes tankegang og konseptuelle forståelse. Den kvantitative dataen er analysert med utgangspunkt i forskningsspørsmålene, og med støtte i det kvalitative gir det innsikt i hvordan fem utvalgte misoppfatninger er utbredt. Basert på analysene er det gjort videre undersøkelser av mulige sammenhenger.

Funnene i studien gir indikasjoner på at misoppfatninger med tilknytning til brøk er vanlig hos elever på 5. trinn. Det er også indikasjoner på at bestemte misoppfatninger har større utbredelse enn andre, og at det kan knyttes til grunnleggende aspekt ved elevenes konseptuelle forståelse. Aspektene har tilknytning til semiotikken og den meningen man gir til tegn. Her blir elevenes individuelle tolking og meningsskaping vektlagt.

Abstract

This study explores the misconceptions in relation to fractions. Previous studies indicate that students' understanding of fractions is essential for further understanding and achievements in mathematics (Bailey et al., 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012; Tsai & Li, 2017). The purpose of this study has been to investigate the connections and prevalence of misconceptions related to fractions amongst 5th grade students. The study is based on the research questions: Which misconception, related to fractions, is most common in 5th grade? Which connections can be found between the misconceptions?

This study is a mixed-methods study, with an explanatory-sequential approach. There is an emphasis on the quantitative, followed by an explanation through qualitative data. By using mixed-methods, one can get a broader and more complete understanding of the phenomenon in question. The study's data is retrieved from a selection of 5th grade students, with 91 students from four different schools. The quantitative data was collected using testing as a method. Based on the quantitative results and students' answers, research interviews were conducted. The purpose of the interviews was to gain a deeper understanding of the students' answers and an insight into the students' thinking and conceptual understanding. The analysis of the quantitative data, with support from the qualitative data, provides an insight into the prevalence of five selected misconceptions. Based on these analysis', further investigations were done as to which connections could be found.

The results of this study indicates that misconceptions associated with fractions are common amongst 5th grade students. There are also indications that certain misconceptions are more prevalent than others, and that these can be linked to basic aspects of students' conceptual understanding. These aspects are related to semiotics and the meaning one gives to signs. Here, the students' individual interpretation and construction of knowledge is emphasized.

Innhold

1 Introduksjon

1.1 Bakgrunn for valg av tema

Matematikk er, og har gjennom tidene, vært en viktig del av samfunnet. Ser man på dagens samfunn og utviklingen, så vil viktigheten av matematikkompetanse øke. Siden 2001 har PISA[1] tester blitt gjennomført i Norge. I forbindelse med disse testene stilte OECD spørsmålene:

> How well are young adults prepared to meet the challenges of the future? Are they able to analyse, reason and communicate their ideas effectively? Do they have the capacity to continue learning throughout life? (OECD, 1999, s. 7)

Det handler om å ha den kunnskapen og ferdighetene man trenger for å mestre ulike utfordringer man møter. Dette bidro til en endring både i læreplaner, men også satsinger i skolen. Da matematikk er et av de fagene som testes, har man hatt et stort fokus på elevers prestasjoner i faget gjennom årene. Det har derfor vært flere realfagssatsinger fra Kunnskapsdepartementet (Bergem et al., 2016, s. 17). Fra 2015 til 2019 hadde regjeringen prosjektet *Tett på realfag,* hvor de la en strategi for økt kompetanse i realfag.

> I dag går én av fem norske ungdommer ut av 10. klasse med karakteren 1 eller 2 i standpunkt i matematikk. De har så dårlige matematikkunnskaper at de vil få problemer med å fullføre videregående skole. I nesten 15 år har matematikkresultatene til norske elever stått på stedet hvil. Vi kan ikke sitte stille og se på at tusenvis av norske ungdommer hvert år går ut av grunnskolen uten å kunne regne. (Kunnskapsdepartementet, 2015, s. 6).

Med andre ord så er det mange elever som strever med matematikk. Mange elever lurer gjerne på hvorfor de trenger matematikk, og ser kanskje ikke alltid meningen med det. Vi har

[1] Norsk nettside for PISA: PISA (Programme for International Student Assessment) - Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (uio.no)

jo datamaskiner og kalkulatorer som gjør det meste av utregningene for oss. Likevel har man eksempler som sier det motsatte. Kunnskapsdepartementet (2015) viser til viktigheten av prosentregning når man gir medisin til pasienter, og at om man ikke kan det så kan man feilmedisinere. De viser også til ingeniører og hvordan en feilberegning kan føre til at en bro kollapser. De sier at «Vi må vise at matematikk er viktig og gir muligheter – for samfunnet og for den enkelte» (Kunnskapsdepartementet, 2015, s. 6). Satsingen *Tett på realfag* ga dessverre ikke de resultatene man ønsket. Funnene fra NIFU[2]-rapporten viser at det er ingen endring i elevers prestasjoner, motivasjon eller interesse for realfag (Kunnskapsdepartementet, 2022).

I PISA 2022, er matematikk hovedområdet. I følge kortrapporten for PISA 2018, har norske elevers gjennomsnittsresultat i matematikk vært uendret på de to siste undersøkelsene. Det har likevel vært framgang siden 2012, da hovedområdet for undersøkelsen var matematikk (Jensen et al., 2019, s. 10). Utenom PISA, så har man også TIMSS[3]. Dette er to av de store internasjonale undersøkelsene. TIMSS gjennomføres hvert fjerde år, og ble gjennomført for første gang i 1995 (Nilsen & Kaarstein, 2021, s. 9). Undersøkelsen ser på naturfag og matematikk, og legges til 5. og 9. trinn i Norge. Innenfor matematikk blir elevene målt på fire emner: Tall, algebra, geometri og målinger, og statistikk og sannsynlighet. Algebra gjelder kun for 9. trinn. Sett utfra TIMSS-studien, så presterer norske elever i gjennomsnitt over skalamidtpunktet til TIMSS på 500 poeng. I TIMSS-studien fra 2015 hadde Norge 542 i poengscore, som tilsvarer middels nivå, men i studien fra 2019 hadde poengscoren gått ned til 540 (Kaarstein et al., 2020, s. 17). Dette er ingen signifikant endring, og ligger stabilt. På middels nivå for 5. trinn, vil det si at «elevene kan bruke grunnleggende matematiske kunnskaper i enkle situasjoner» (Bergem, 2016, s. 36). Det skal likevel presiseres at de norske elevene skårer lavest på emnet tall, sammenlignet med de andre emnene (Bergem, 2016, s. 35). Emneområdet tall tar for seg de fire regneartene, i tillegg til brøk og desimaltall (Grønmo et al., 2013, s. 14). På 9. trinn er algebra det emnet som er mest utfordrende for elevene. Grønmo (2013) assosierer algebra og tall som motoren i matematikk, og at algebra

[2] NIFU – Nordisk institutt for studier av innovasjon, forskning og utdanning

[3] Norsk nettside for TIMSS: [Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) - Institutt for lærerutdanning og skoleforskning (uio.no)]

er en generalisering av regning med tall (Grønmo, 2013). Det er derfor en klar sammenheng mellom disse to emnene.

Der finnes tidligere forskning som tar for seg sammenhengen mellom brøk og algebra. Siegler et al. (2012) utførte en longitudinell studie hvor de så på tidlige tegn eller variabler som kunne predikere elevers prestasjoner i matematikk. De testet elever når de var 10 år, og på nytt igjen når de samme elevene var 16 år. Resultatene viste at kunnskaper innenfor brøk og divisjon predikerer elevene i senere skoleløp, både når det gjelder kunnskap i algebra og generelle matematikk prestasjoner (Siegler et al., 2012, s. 691). Brøk og divisjon har sterke koblinger, da divisjon blant annet kan skrives opp som en brøk (Alseth, 1998, s. 44). Videre kan man si at den effekten som brøkkunnskap har på prestasjoner i matematikk generelt og algebra, er større enn andre matematiske områder. Den har også større effekt enn intellektuelt nivå og elevenes familiebakgrunn (Siegler et al., 2012, s. 693). Med utgangspunkt i funnene til Siegler og hans kolleger, kan man si at det foreligger en sammenheng mellom elevers prestasjoner fra emneområdet tall på 5. trinn, og prestasjoner i emneområdet algebra på 9. trinn. Dette kan også kobles til en rapport fra USA hvor man konkluderte at "The most important foundational skill not presently developed appears to be proficiency with fractions (including decimals, percent, and negative fractions). The teaching of fractions must be acknowledged as critically important and improved before an increase in student achievement in algebra can be expected" (NMAP, 2008, s. 18)

Brøk er ett av de emnene knyttet til tallforståelse i matematikk som elever strever mest med (Petit et al., 2010). Å forstå konseptet brøk er essensielt i læringen av matematikk, samtidig som undervisning og læring av brøk er krevende (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 293; Davis et al., 1993, s. 63; Moss & Case, 1999; Ni & Zhou, 2005; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Det forutsetter at man har en dypere forståelse for tall, samtidig som det er viktig for elevers prestasjoner innenfor matematikk senere i skoleløpet (Bailey et al., 2012; Booth & Newton, 2012; Siegler et al., 2012; Tsai & Li, 2017). Forskning vektlegger at forståelse knyttet til brøk er av stor betydning, men det er også et av de emnene som elever har mest utfordringer med. Dette gjør det til et spennende tema å forske på, og da spesielt rettet mot 5. trinn.

Da utfordringer med brøk kobles mot elevers forståelse, kan man dra inn misoppfatninger. Misoppfatninger er en form for forståelse, og kan defineres som ufullstendige tanker man har til et begrep. De bygger på en bestemt tenkning, og er ikke tilfeldige feil (Brekke, 2002, s. 10; Matematikksenteret, 2019a). Det er altså forståelsen man har dannet seg, og om den forståelsen samsvarer med meningen bak begrepet. Brekke (2002, s. 10) sier at misoppfatninger ikke er tilfeldige feil, men en konsekvent idé som ligger bak. Dette er et resultat av at man overgeneraliserer tidligere kunnskap inn mot nye områder hvor denne kunnskapen ikke gjelder fullt ut (Brekke, 2002, s. 10). Man prøver å skape sammenheng og mening mellom forkunnskap og det man lærer. Det å konstruere en mental representasjon av et konsept vil være avhengig av kunnskapen man har; individets forforståelse. Å se relevante relasjoner mellom den nye kunnskapen og det man vet fra før, og bygge på den kunnskapen, kan være krevende kognitivt (Newton, 2012, s. 80). Enkelte misoppfatninger kan være enkle å rette på, og andre misoppfatninger kan være fundamentale for forståelsen. Swan (2001) mener at når mennesker gjør feil, så gjør man det av ulike grunner. I noen tilfeller kan konsentrasjonsproblemer ligge til grunn, eller at man har gjort et forhastet resonnement. Ved dypere misforståelser, kan alternative tolkninger av situasjoner resultere i feil (Swan, 2001, s. 147). Matematikksenteret (2019a) presiserer at dersom forståelsen av et begrep er annerledes enn det som er meningen, kan det hindre den videre faglige utviklingen. Forskning viser at feil kan være en viktig kilde for videre læring (Boaler, 2015, s. 11–13). Forståelse og mening kan knyttes til konstruering av kunnskap og semiotikkens rolle. Hvordan man forstår og oppfatter ny kunnskap, er en naturlig del av læringsprosessen. Derfor er også misoppfatninger en naturlig del av læringsprosessen, og kan være et godt grunnlag for videre læring (Brekke, 2002; Hansen et al., 2020, s. 3; Matematikksenteret, 2019j).

1.2 Problemstilling

Fra egen praksiserfaring og fra tidligere forskning, kan man se at brøkbegrepet er utfordrende for mange elever. Forståelse knyttet til brøk viser seg å være viktig for elevers forståelse i andre matematiske emner, men også prestasjoner. Misoppfatninger kan spille en stor rolle for videre utvikling i faget, og problemstillingen er dannet på bakgrunn av dette. I Norge har det vært utført flere forskningsprosjekt for å avdekke og kartlegge elevers misoppfatninger innenfor matematikk. Dette gjelder både KIM-prosjektet[4] som foregikk på 1990-tallet, men også FRAMM-prosjektet[5] som ble utført av Matematikksenteret i perioden 2014-2018. Sistnevnte kartlagte misoppfatninger knyttet til brøk. Denne studien har tatt utgangspunkt i noen av disse misoppfatningene som man allerede kjenner til, og studert disse nærmere.

Hensikten med denne studien har vært å undersøke sammenhenger og utbredelse av misoppfatninger knyttet til brøk. I den nye læreplanen LK20, også kalt Fagfornyinga (Utdanningsdirektoratet, 2020), er brøk et gjennomgående tema på 5.trinn. Med utgangspunkt i studien til Siegler et al. (2012) og resultatene fra TIMSS, var det derfor relevant å legge studien til dette trinnet. På bakgrunn av dette er problemstillingen:

> *Hvilke sammenhenger mellom og utbredelse av misoppfatninger knyttet til brøk, kan man finne blant elever på 5.trinn?*

For å svare på problemstillingen har jeg tatt utgangspunkt i følgende forskningsspørsmål:

1. *Hvilken misoppfatning knyttet til brøk ser man mest av på 5.trinn?*
2. *Hvilke sammenhenger kan man finne mellom misoppfatningene?*

[4] Kvalitet i matematikkundervisningen

[5] Prosjektet het FRAMM (**Fra misoppfatning til mestring)** i en periode, men heter nå Misoppfatninger i matematikk. Prosjektets nettside: Misoppfatninger i matematikk | Matematikksenteret

For å svare på forskningsspørsmålene, er det innhentet svar fra 91 elever på et oppgavesett med brøkoppgaver som tar utgangspunkt i ulike misoppfatninger. I tillegg til oppgavesettet, har jeg utført ni intervju. Dette var for å få en dypere forståelse for hvorfor elevene svarte som de gjorde og hvordan deres forståelse av brøk var.

1.3 Avgrensinger ved studien

Misoppfatninger knyttet til brøk er et stort fagområde. Da forskning viser at misoppfatningene er vanlig på mellomtrinnet (Clements et al., 2013), var det naturlig å se på det trinnet der brøk er eksplisitt i kompetansemålene, og da har større fokus i undervisningen. Forskning viser også at forståelse av brøk påvirker andre emneområder senere i skoleløpet (Siegler et al., 2012). Studien ble derfor avgrenset til 5.trinn. Videre ble valg av misoppfatninger relevant. Innenfor brøk, viser litteraturen til mange ulike misoppfatninger. For å avgrense antall misoppfatninger, valgte jeg å se på misoppfatninger som kan knyttes til grunnleggende brøkforståelse. Dette var på bakgrunn av prestasjonsnivået hos norske elever under TIMSS, hvor det vises til grunnleggende matematiske kunnskaper (Bergem, 2016, s. 36). Misoppfatningene som er valgt, ble også brukt under et feltarbeid i praksis, og det var derfor interessant å kunne gå mer i dybden på dem. Det er ulike innganger til emnet, men i denne studien har jeg valgt å avgrense det til semiotikken og elevenes forståelse av brøk. Dette inkluderer forståelse av brøkens notasjon og brøk som egen tallstørrelse.

1.4 Oppbyggingen av studien

Oppgaven er delt inn i seks kapitler. Dette inkluderer introduksjon, kunnskapsgrunnlag, metode, resultat og analyse, drøfting, og til slutt konklusjon. Andre kapittel tar for seg kunnskapsgrunnlaget og forskning knyttet til studien. Her legges fokuset til studiens hovedtema; brøk og misoppfatninger. Her vil jeg se på brøk og ulike årsaker som kan være grunnen til at elever danner misoppfatninger. Dette gjelder blant annet heltallsforståelse og konseptet «deler av det hele». Her vil jeg også se på de fem aspektene knyttet til brøk; del-hel, forhold, operator, kvotient, og mål/størrelse. Videre vil jeg se på representasjonsformer og hvordan semiotikken spiller en rolle i elevers forståelse. Til slutt vil jeg ta for meg misoppfatninger generelt og de som er relevant for denne studien. Kapittel 3 omhandler metode og beskriver hvordan arbeidet har foregått gjennom hele prosessen. Dette inkluderer valg av metode, validitet og reliabilitet, datainnsamlingene, behandling og analyse av data, og etiske refleksjoner knytt til valgene. I kapittel 4 finner man resultatkapittelet med statistisk analyse av oppgavesettet og dataen, og oppgavene sett opp mot intervjuene. Kapittel 5 tar for seg drøfting av funn. Her blir resultatene drøftet opp mot problemstillingen og teori. Her har jeg også inkludert implikasjoner og videre forsking, og egen refleksjon av studien. Siste kapittel inneholder en konklusjon.

2 Kunnskapsgrunnlag

I dette kapittelet blir det presentert teori og forskning som er relevant for studien. Jeg starter med læringsteorien konstruktivisme. Konstruktivisme og kognitiv teori, legger fundamentet for hvordan misoppfatninger blir forstått i denne studien. Videre er begrepet brøk sentralt, og ulike årsaker som kan ligge til grunn for misoppfatninger. Da misoppfatninger er en del av elevers forståelse og utvikling, går jeg nærmere inn på dette og hvilke misoppfatninger man møter. Dette knyttes også opp mot semiotikken, hvor man ser på individets tolking av matematiske tegn og konstruksjon av mening.

2.1 Konstruktivisme og kognitiv teori

«Verbal or cogitative intelligence is based on practical or sensorimotor intelligence which in turn depends on acquired and recombined habits and associations» (Piaget, 1952, s. 1). Hvordan man lærer, individets hukommelse, og hvordan man tenker og løser problemer, er emner man kan knytte til psykologien. Dette er fordi det handler om det kognitive (Imsen, 1998, s. 35). Det er mange ulike psykologiske teorier, og innenfor pedagogikken kaller man dem læringsteorier. Blant læringsteoriene finner man konstruktivismen. I konstruktivismen, sier man at læring er et resultat av hva mennesket gjør med den stimuleringen man usettes for; som individ velger man ut, man tolker, og man tilpasser stimuleringen til sitt system (Imsen, 1998, s. 36). Mennesket konstruerer sin egen subjektive kunnskap. En av Piaget sine teorier om hvordan kunnskap konstrueres, er knyttet til handlinger (Piaget, 1970). Ved å tolke de ytre stimuleringene opp mot den kunnskapen man allerede har, kan man da tilegne seg ny kunnskap. Dette er en kontinuerlig prosess, og derfor forandrer og utvikler kunnskapen seg hele tiden.

Konstruktivismen er beslektet med den kognitive psykologien som vektlegger de indre, mentale prosessene under læring. Man ser på mennesket som aktivt tolkende i møte med ytre stimulering (Imsen, 1998, s. 35; Piaget, 1952). Innenfor konstruktivismen skiller man mellom kognitiv og sosial konstruktivisme. Sosial konstruktivisme er en idé om at læring og kunnskap blir konstruert gjennom sosiale interaksjoner, og at det ikke er en individuell erfaring. «Every function in the child's cultural development appears twice: first, on the social level, and later, on the individual level; first, between people (interpsychological), and then inside the child" (Vygotsky, 1978, s. 57). Denne studien tar utgangspunkt i den kognitive konstruktivismen da det handler om elevers forståelse og hvordan de individuelt konstruerer mening. Elevers forståelse kan være forskjellig, og konstruering av kunnskap kan derfor tolkes som noe individuelt.

Jean Piaget (1896-1980), var en sveitsisk filosof og psykolog, og er et kjent navn innenfor den kognitive konstruktivismen. Der vektlegges det som skjer i individets indre under læring, og læringen sees på som et individuelt anliggende hvor konstruksjonen av kunnskap foregår i hodet til individet (Imsen, 1998, s. 36; Piaget, 1952). Det handler om hvordan individet lærer. Sentrale begrep man finner innenfor kognitiv konstruktivisme er assimilasjon og akkomodasjon, og spesielt kognitive skjema. Kognitive skjema er et begrep på kunnskap som en person har lagret i minnet (Piaget, 1952). Skjemaene blir så dratt frem i nye og ulike situasjoner. Da prøver man å bruke den kunnskapen man har for å finne ut av det. Assimilasjon og akkomodasjon tar plass i læringsprosessen, der man møter ny informasjon og kunnskap. Assimilering er en prosess hvor man sammenligner tidligere kunnskap med ny kunnskap, og man prøver å tolke og forstå det ut fra de skjemaene man har (Piaget, 1952). Dette kan man knytte til elevers møte med brøk og bruk av heltallstenking. Da bruker elevene den kunnskapen de har fra før for å prøve å forstå hvordan brøk henger sammen (Hartnett & Gelman, 1998). Å se relevante relasjoner mellom den nye kunnskapen og det man vet fra før, og bygge på den kunnskapen, kan være krevende kognitivt (Newton, 2012, s.

80). Om elevenes tidligere kunnskap ikke oppleves som tilstrekkelig, kan elevene oppleve at noe ikke stemmer. Man står gjerne i en ubalanse. Da vil skjemaene og kunnskapen endres, og da med et ønske om å få balanse (equilibrium). Denne prosessen er det man kaller akkomodasjon (Piaget, 1952). Man utvider kunnskapen slik at det også kan brukes i den nye sitasjonen man står ovenfor. For å oppnå balanse endres skjema for å akkomodere den nye informasjonen (Piaget, 1952), og man kan derfor si at forståelsen endres i det man utvider kunnskapen. Begge prosessene er svært viktige for læring, og det er viktig å huske at hver elev kommer inn med ulike utgangspunkt, og kan ha ulik forkunnskap.

Kognitiv teori vektlegger at kunnskap kan omsettes til symboler, bilder, språk, begreper og abstraksjoner (Imsen, 1998, s. 54). Det kan knyttes til matematisk kognisjon, som innebærer komplekse mentale aktiviteter (LeFevre et al., 2005, s. 361). Dette kan være identifisering av kvantiteter og å oversette dem til interne representasjoner og mentale sammenligninger. Interne representasjoner og mentale sammenligninger er også element man kan knytte til semiotikken, og hvordan elevers forståelse er avhengig av referansekontekst. Dette kommer jeg tilbake til i delkapittel 2.5.

Konstruktivisme viser altså til hvordan man som individ konstruerer kunnskap og skaper forståelse. Denne studien vektlegger elevers forståelse av brøk, og de utfordringene som konseptet brøk bærer med seg. I neste delkapittel blir brøkbegrepet diskutert.

2.2 Brøk

Tall er noe vi får kjennskap til tidlig, og man lærer å telle allerede før skolealder (Mononen, 2019). Når man som barn har sitt første møte med tall, så er det de naturlige (N = {0, 1, 2, 3, …}) tallene man møter. Videre i skoleløpet møter man hele tall, som da er en utvidelse av naturlige tall. Her blir negative tall inkludert i tallmengden. Det er likevel flere tall man skal forholde seg til. I dagens læreplan LK 20 finner man brøk og desimaltall under kompetansemålene for 5. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020). Disse defineres som de rasjonale tallene. Rasjonale tall er mer komplisert enn de naturlige tallene, og det kan delvis sies å være på grunn av de ulike representasjonene (for eksempel brøk og desimaltall) og områdene de brukes i (ulike aspekt slik som del av hel og forhold) (Kilpatrick et al., 2001, s. 231).

Begrepet brøk, eller «fraction» som det heter på engelsk, kommer fra det latinske ordet *fractus* og betyr «broken». Fraksjon på norsk betyr del. På den måten kan man si at det er noe som er delt, og ikke er helt lenger. Det vil si at elevene jobber med mer enn bare hele tall. Det man forbinder med begrepet brøk er som oftest teller, nevner og en brøkstrek. Brøk er et rasjonalt tall og kan skrives som uttrykket $\frac{a}{b}$, der b $\neq$ 0 (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010, s. 183). En brøk skrives på en annen måte enn hele tall, og er på den måten abstrakt. Dette kan kanskje begrunnes med at notasjonen brøk består av to siffer, som elever kjenner igjen som hele tall. Her blir utfordringen å se hele brøken som én tallstørrelse. Forholdet mellom teller og nevner er sterkt knyttet gjennom multiplikasjon og divisjon, og skaper ofte en utfordring for elever når de møter rasjonale tall for første gang (Kilpatrick et al., 2001, s. 231).

Petit et al. (, s. xi) ser på brøk som kvantiteter som kan sammenlignes, representeres, lokaliseres på tallinje, og som gjøres regneoperasjoner på. Rasjonale tall er tall, og et hvert rasjonalt tall har sin unike plass på tallinjen (Kilpatrick et al., 2001, s. 235; Siegler et al., 2011). Innenfor avansert matematikk, er rasjonale tall konseptualisert som abstrakte, individuelle enheter som gir mening innenfor et formelt system (Dörfler, 1995). For noen elever kan det være vanskelig å konseptualisere rasjonale tall, og se det som en strukturert mengde av tall.

Brøk kan ha mange betydninger, og man møter gjerne alle de ulike betydningene i dagliglivet (Bondø & Tokle, 2018, s. 3). Mange uttrykk har man gjerne hørt om før man starter på skolen, men hva som ligger bak uttrykkene er ikke det sikkert at de vet. Dette kan for eksempel være halvparten eller like stor del. For elever kan en uformell forståelse av rasjonale tall bygge på forestillingen om å dele likt mellom seg, og at delene skal være like store (Kilpatrick et al., 2001, s. 232). Man kan representere brøk og rasjonale tall på ulike måter. En halv kan skrives som $\frac{1}{2}$ på brøkform, men også uttrykkes som 50% i prosentform, eller 0,5 som desimaltall.

Som sagt, er konseptet brøk et utfordrende emne for elever (Petit et al., 2010). Likevel er forståelsen for brøk sentralt for videre progresjon og prestasjoner i matematikk. Dette gjelder spesielt emnet algebra (Booth & Newton, 2012; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Jordan et al., 2017; Neagoy, 2017; Siegler et al., 2012). Lamon (2020) vektlegger viktigheten av brøkforståelse, og konsekvenser det kan ha.

> The losses that occur because of the gaps in conceptual understanding about fractions, ratios, and related topics are incalculable. The consequences of doing, rather than understanding, directly or indirectly affect a person's attitudes toward mathematics, enjoyment and motivation in learning, course selection in mathematics and science, achievement, career flexibility, and even the ability to fully appreciate some of the simplest phenomena in everyday life. (Lamon, 2020, s. xi)

Man kan se utfordringene med brøk og hvor viktig det er, samtidig som man kan se konsekvenser det kan ha for videre læring. Det som er interessant, er årsakene til at brøk er så utfordrende.

2.3 Årsaker til utfordringer med brøk

En av årsakene til at elever har utfordring med brøk er heltallsforståelse. Dette fenomenet blir referert til som «Whole number bias» (Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011). Her bruker elevene sin forståelse av regning med hele tall i møte med brøk. Generalisering av tall som enheter for telling, forstyrrer elevenes læring av brøk (Petit et al., 2010). Ni og Zhou (2005, s. 28) vektlegger det kognitive spranget som elevene møter når de går fra heltall til brøk. Dette støttes av Matematikksenteret om sier at de erfaringene elever har med hele tall , er knyttet til vansker som oppstår i møte med brøk (Matematikksenteret, 2019b).

Helltallstenking vil si at man ser på telleren og nevneren som rene tallstørrelser. På den måten kan elevene tro at den kunnskapen de har om heltall, også gjelder for andre tall (Jordan et al., 2017, s. 626). Man ser ikke på forholdet mellom teller og nevner. Et eksempel på dette er å sammenligne brøker, men at man da tar utgangspunkt i nevneren eller telleren når man avgjør hvilken som er størst (Matematikksenteret, 2019b). Man bruker altså det man kan om heltall for å forstå brøk. Si at man har brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{3}{6}$. Her vil eleven kunne si at 3 er større enn 1, og at 6 er større enn 2. Da vil eleven kun se på sifrene som egne tall, og ikke helheten og forholdet mellom dem (Stafylidou & Vosniadou, 2004). Dette er en utfordring som mange elever har (Petit et al., 2010). Selv om de to sifrene som representer teller og nevner, brukes for å vise én tallstørrelse, så er det kun i relasjon til hverandre at de gir mening. Heltallstenking er én av flere kilder til hvorfor elever strever med å lære brøk (Torbeyns et al., 2015).

Om man tar med undervisningen i vurderingen, så kan også den være en årsak til at brøk er utfordrende. Her vil læreres brøkforståelse være sentral i planlegging, undervisning og elevenes læring (Tsai & Li, 2017, s. 245–246). Forskning viser også at rekkefølgen som rasjonale tall blir introdusert, kan ha noe å si for forståelsen (Moss & Case, 1999). Enkelte mener at brøkutfordringer kommer av brøkundervisning som fokuserer på innlæring av algoritmer knyttet til regning med brøk (Bjerke et al., 2013; Mack, 1993; Moss & Case, 1999; Neagoy, 2017). Dette er da uavhengig av om elevene har fått en god forståelse av selve begrepet først og at det får en meningsfull tilknytning. Konsekvenser av dette er at elevene ikke har forståelse for det de gjør, og kan heller ikke argumenterer for eller reflektere over svarene sine. En slik undervisning bærer preg av instrumentell forståelse frem for en relasjonell forståelse (Skemp, 1976). Instrumentell forståelse vektlegger at man skal lære seg regler og prosedyrer (Kilpatrick et al., 2001; Skemp, 1976). For at elevene skal få en god forståelse for hvorfor man utfører de prosedyrene, krever det at man har en undervisning som legger grunnlaget for en relasjonell forståelse. Dypere forståelse for rasjonale tall er viktig, og man må legge til rette for dette. Variasjon i representasjonsformer i undervisningen er derfor viktig for å gi en dypere forståelse (Kurt & Cakiroglu, 2009; Sowder, 1988). Dette kommer jeg tilbake til i delkapittel 2.5. Neste delkapittel tar for seg fem aspekt innenfor brøkbegrepet, som viser kompleksiteten bak brøkbegrepet.

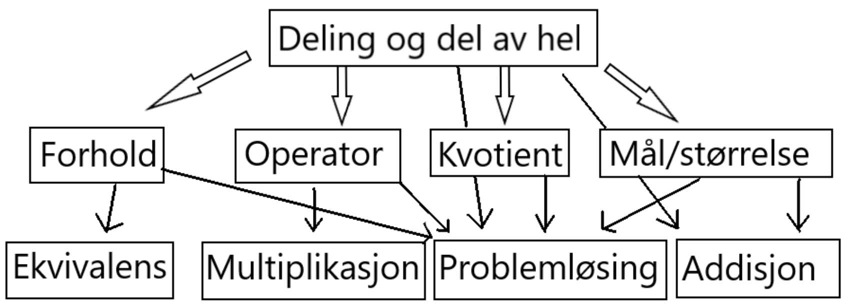
2.4 Fem aspekt

For å få en fullstendig forståelse for brøkbegrepet, sier forskning at man må beherske fem aspekt: del-hel, forhold, operator, kvotient, og mål/størrelse (Alseth, 1998, s. 44; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, s. 293). Med fem aspekt, og da fem ulike betydninger, gir det et nytt perspektiv på hvordan elever tolker tall.

I 1976 var Kieren den første som omtalte aspektene. Kieren argumenterte for at erfaring med ulike aspekt var nødvendig (Kieren, 1976, s. 102). Dette ble videreutviklet av Behr med kolleger (1983). Behr et al. (1983) utviklet en teoretisk modell som tar for seg aspektene og hvordan de kan henge sammen (figur 1). Aspektene ser man i de to øverste rekkene, mens den nederste rekken viser til områder hvor det kan anvendes.

Figur 1.

Aspekter ved brøkbegrepet og den rollen det spiller i brøkforståelsen.



Note: Oversettelse av modell fra Behr et al.(1983, s, 100)

Dersom man har et ensidig fokus på et aspekt, kan dette føre til mangelfull forståelse hos elevene (Bjerke et al., 2013, s. 1). Mack (1993, s. 91) viser til en begrensing knyttet til aspektet brøk som del av hel: «7/3 sort of doesn't make sense. You can't have 7 out of 3». Det kommer fram av forskning at begrensninger knyttet til konseptet «deler av det hele», er noe av grunnen til at brøk er utfordrende for elever (Wilkins & Norton, 2018, s. 1). Wilkins og

Norton (2018) mener at forståelse for brøk er essensielt, da det legger grunnlaget for andre emner i matematikken. Når man jobber med brøk, er det viktig å presisere for elevene hvilket aspekt man jobber med (Matematikksenteret, 2019e).

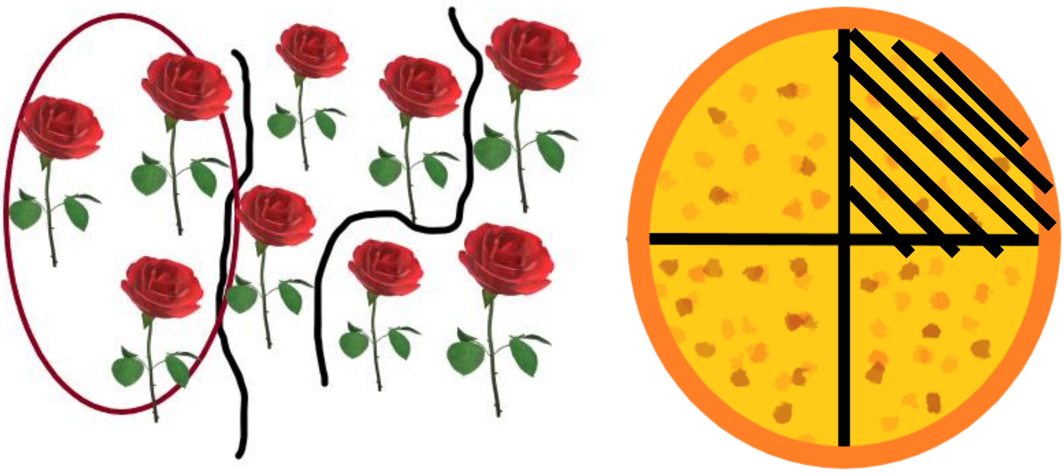
Av de fem aspektene, er tre aspekter relevante for de misoppfatningene som vektlegges i denne studien. Disse blir trukket frem som hovedelement i analysen. Aspektene del-hel, forhold og mål/størrelse, relaterer til elevenes utfordringer med å se brøk som en tallstørrelse i seg selv. Alle fem aspektene blir nå utdypet, da det gir et helhetlig bilde på hva som ligger til grunn for brøkforståelse.

2.4.1 Del-hel

Dette aspektet legger grunnlaget for de andre aspektene ifølge modellen. Aspektet tar for seg brøk som del av en helhet, hvor antall deler er sammenlignet med antall deler i helheten (Bondø & Tokle, 2018, s. 5). Mulige kontekster kan være «De spiste $\frac{3}{4}$ av kaken» og «De trengte $\frac{3}{4}$ av flaskene i en kasse med brus». Altså helheten kan være både mengde (klinkekuler, dropspose, pris) og objekt (pizza, kake, areal) (Bondø & Tokle, 2018). Annen forskning viser til oppdelingen av en kontinuerlig enhet eller sett av objekter i delmengder (Behr et al., 1983; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020). Her viser man da til at delmengden skal ha lik størrelse som de andre delmengdene. Ser man tilbake på definisjonen av brøk, så vet man at uttrykket $\frac{a}{b}$ viser til a deler av b like deler. Et eksempel på dette er figur 2. Bildet til venstre viser til ni roser som er delt opp tre like store deler. Her er det ikke størrelsen på rosene som betyr noe, men størrelsen på hver del. Hver del består av tre roser, og er et bilde på del av her ved bruk av en mengdemodell. Eksempelet viset til brøken $\frac{1}{3}$. I eksempelet til høyre har vi en arealmodell. Dette er et eksempel på en kontinuerlig enhet, som kan forståes som en uavbrutt enhet i motsetning til et sett av objekter. Modellen viser en pizza delt opp i fire like store deler hvor én del er markert. Forskning viser at det mest brukte objektet i undervisning er pizza, og at elever knytter brøk opp mot arealmodeller (Neagoy, 2017; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Figur 2.

Eksempel på del-hel aspektet.



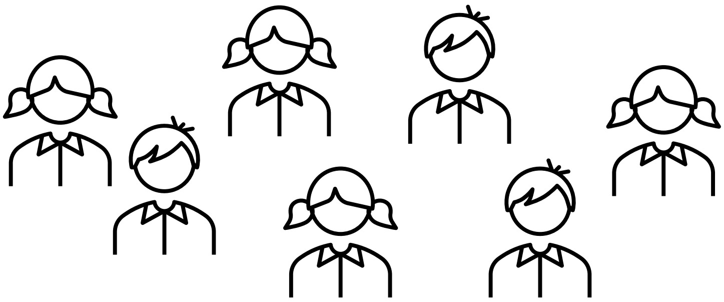
Aspektet ser på størrelse og lik deling av enheter. Det å kunne dele opp en enhet eller mengde i like deler kan anses av mange som grunnleggende for videre brøkforståelse (Lamon, 2020; Petit et al., 2010). Å dele opp i like store deler betyr også at man må ha forståelse av hva det hele er, men også en forståelse for størrelse. Derfor er det viktig å bruke ulike representasjoner slik at elevene får flere referansekontekster.

2.4.2 Forhold

Dette aspektet sammenligner deler med hverandre (del-del), eller sammenligner delene med helheten (del-hel) (Behr et al., 1983; Bondø & Tokle, 2018, s. 8; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020). Det vil si at man sammenligner størrelser, og da gjerne to opp mot hverandre. Størrelsene kan være like, men de kan også være ulike. Ved ulike størrelser viser man gjerne til begrepet rate. Et eksempel på det er løping. Om man løper 60 m på 10 sekund, har vi da en rate lik $\frac{60}{10}$, og en hastighet på 6m/s. Mulige kontekster for den andre sammenligningen kan være elever i en grupper. Med utgangspunkt i figur 3, har vi syv elever. Av de syv har vi tre gutter og fire jenter. Eksempel på de forholdene man da får er: $\frac{3}{4}$ som viser til del-del, og $\frac{4}{7}$ som viser til del-hel.

Figur 3.

Eksempel på forhold aspektet



2.4.3 Mål/størrelse

I dette aspektet sammenligner man deler av helhet med helheten. Her relateres brøken til en måleenhet, men det kan også være et tall som kan relateres til andre tall (Bondø & Tokle, 2018; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020). Å se brøken som en egen tallstørrelse, er et steg videre fra de hele tallene. Som nevnt tidligere, er dette et kognitivt sprang for elevene. I arbeidet med hele tall har elevene en forståelse av at det ikke er andre hele tall mellom for eksempel 2 og 3. Det kan derfor være utfordrende for elevene å se at det kan være uendelig mange brøker mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{3}$. Her knytter man ofte aspektet opp mot en tallinje. Tallinjen kjenner elevene igjen fra før, og kan koble det til både meter, centimeter og millimeter. 1 mm er $\frac{1}{10}$ av 1cm.

2.4.4 Operator

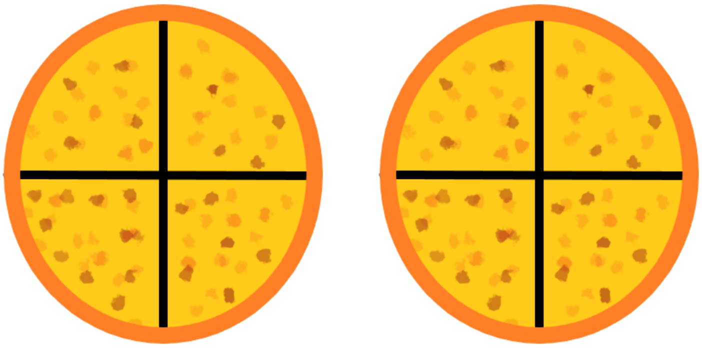
Operator-aspektet ser på brøken som en funksjon og hvordan den virker på en størrelse, slik at den blir større eller mindre (Behr et al., 1983; Bondø & Tokle, 2018, s. 6; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020). Lamon (2020, s. 201) sier at operatoraspektet handler om å trekke sammen og utvide, forstørre og redusere, eller multiplisere og dele. Dette er multiplikative situasjoner, hvor mulige kontekster kan være «Bruk $\frac{4}{5}$ av 2 kg mel» eller «Morten spiste $\frac{3}{4}$ av to pizzaer». Et eksempel hvor brøken er operator, kan være $\frac{3}{4}$ hvor du da multipliserer med 3 og dividerer med 4. Dette kan være en regneoperasjon på en mengde Q:

$$\frac{3}{4}(Q) = 2\left(\frac{Q}{4}\right) = \frac{2Q}{4}$$

Så med to pizzaer da så blir det $\frac{3}{4}$ av 2 (se figur 4).

Figur 4.

Eksempel på operator aspektet



(2 x 3) ÷ 4 = $1\frac{1}{2}$ (pizza)

eller

(8 x 3) ÷ 4 = 6 (6 pizzastykker)

2.4.5 Kvotient

I kvotient-aspektet er brøken svaret i en divisjon, der to heltall divideres (Bondø & Tokle, 2018; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020). Mulige kontekster kan være at «3 pizzaer skal deles på 4 personer, hvor mye får hver person?». Her kan man sette x = mengden pizza per person. Løsningen kan man finne ved å løse likningen 4x = 3. Man må da gjøre en divisjon som da gir x = $\frac{3}{4}$. Brøken er da resultatet av et divisjonsstykke. Av et areal blir det like deler, men av en mengde betyr det like mange element i hver del. Dette har tydelige koblinger til del-hel aspektet og det å dele likt (Lamon, 2020, s. 182).

De fem aspektene er viktige for å få en god brøkforståelse, og må vektlegges i undervisning. Dette innebærer at man får erfare hvert aspekt av begrepet innenfor ulike og passende referansekontekster (Kilpatrick et al., 2001, s. 236). Man må også ha ulike modeller og representasjoner, og det er viktig at man går frem og tilbake mellom dem for å vise koblingen på en fleksibel måte (Ryan & Williams, 2007, s. 18). Dette knytter jeg opp mot temaet semiotikk i neste delkapittel.

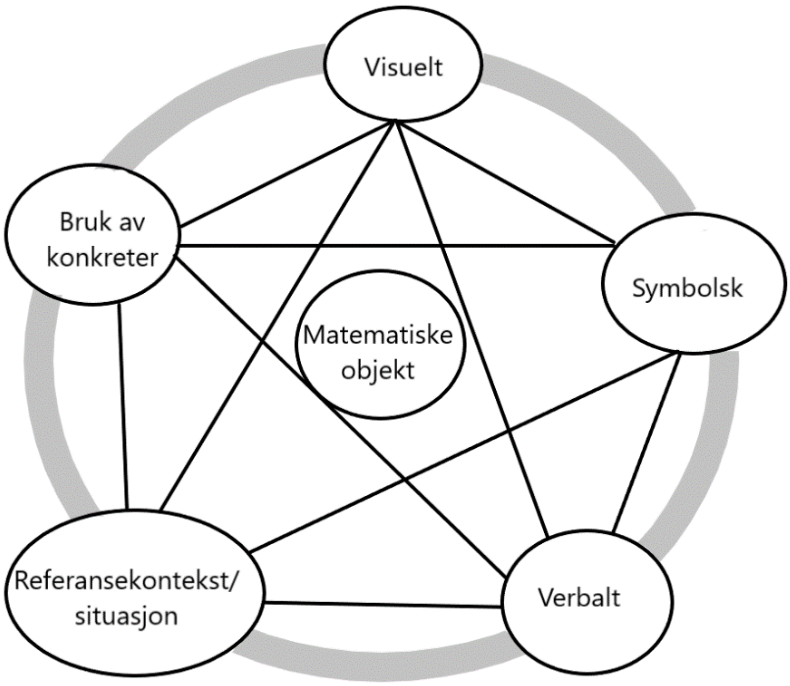
2.5 Semiotikk

Kognitiv konstruktivisme viser til individets tolking basert på kunnskap man har fra før. Gjennom erfaringer i den virkelig verden, kan man finne repeterende egenskaper som man igjen kan generalisere. Tall er noe abstrakt man har generalisert, og er derfor et konsept (Bidwell, 1966). Bidwell (199, s. 2) sier at rasjonale tall er et uendelig sett av abstrakte objekt.

Matematikken består av tegn og symbol som er representasjoner av konsept og begrep, og hvordan man forstår og tolker de tegnene er viktig. Man viser gjerne til fem representasjonsformer; konkreter, visuelle, referansekontekst, symbolske og verbale (R. A. Lesh et al., 1976; Svingen, 2018). De ulike representasjonene gir da uttrykk for det samme matematiske objektet (figur 5). Svingen (2018) sier at man må være i stand til å se sammenhenger mellom representasjonene for å utvikle dyp forståelse i matematikk.

Figur 5.

Representasjoner for matematiske objekter, og forholdet mellom dem.

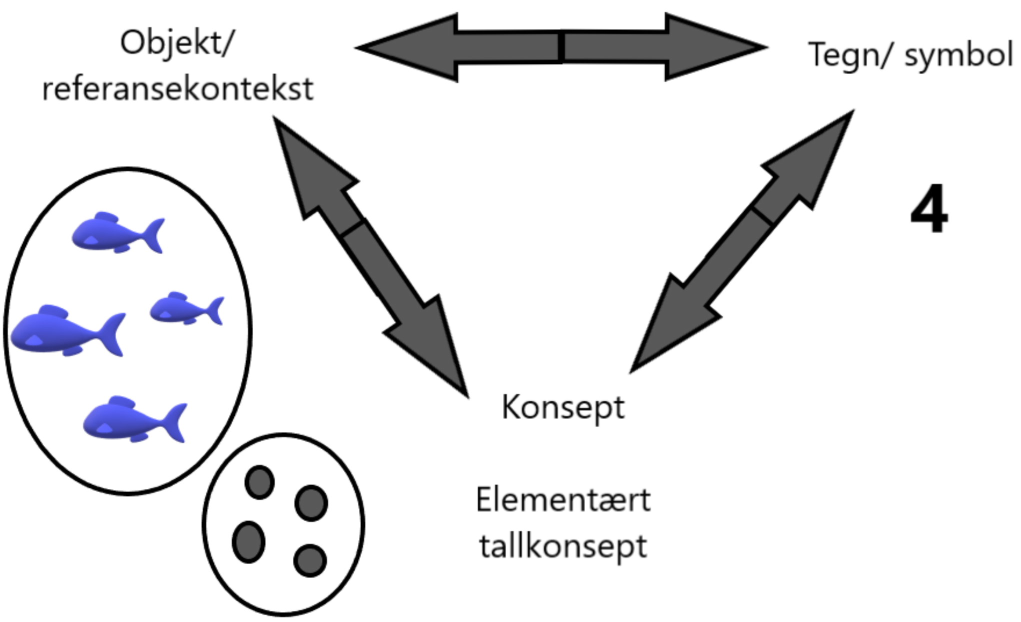


Note: Oversettelse av modell fra Svingen (2018, s. 3)

Hvordan man tolker og forstår, har kobling til semiotikken. Steinbring (2006) viser til den epistemologiske trekanten, og hvordan man gir mening til tegnene man har rundt seg. Trekanten (jf. figur 6) viser til sammenhengen mellom ulike faktorer. Steinbring (2006, s. 134-135) vektlegger at den meningen man gir et tegn, må konstrueres gjennom ulike og passende referansekontekster. Referansekonteksten regnes som sentral, da tegnet alene ikke gir mening. Det er derfor viktig å ha flere representasjoner man kan knytte både til begrepet og det symbolske. Arealmodeller (for eksempel sirkel, firkant, pizza og kake) blir ofte brukt i undervisning, og kan hjelpe elever med å se brøk som del av helhet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Neagoy, 2017). Om elevene kun knytter brøk opp mot figurer, så er det uheldig for brøkforståelsen (Bjerke & Pettersen, 2012, s. 26). Man må få erfaring med tegnet gjennom ulike situasjoner, og man må tolke tegnene gjennom de situasjonene. Selve tolkingen skjer i individet, og er preget av den forforståelsen man har; den matematiske kunnskapen individet har med seg (Steinbring, 2006, s. 136–137). Steinbring sier at det er individet som konstruerer kunnskapen og ser de sammenhengene som oppstår mellom tegnet og situasjonene.

Figur 6.

Den semiotiske medieringen mellom tall og objekt.



Note: Oversettelse av modell fra Steinbring (2006, s. 141).

Duval (2006, s. 107) argumenterer for at tilgangen til matematiske objekt, kun er tilgjengelig gjennom tegn og semiotiske representasjoner. Man kan ikke observere tallet $\frac{1}{2}$ i miljøet. Matematiske objekt må ikke forveksles med de representasjonene som brukes. Den matematiske aktiviteten skjer gjennom å bearbeide de matematiske objektene, og transformere til ulike representasjoner (Duval, 2006). Ved å bytte mellom en symbolsk og visuell representasjon, kan det være enklere for en elev å se størrelsen på brøken.

Fra tidlig i skoleløpet blir elever introdusert for konkreter og ulike objekter som skal være til hjelp i læringsprosessen. Eksempler på dette kan være tellebrikker, cuisenaire-staver og brøksirkler. Slike konkreter skal hjelpe elevene til å se sammenhenger, og finne mening knyttet til begrepene de møter (Matematikksenteret, u.å.). Da a tolkningen skjer i individet (Steinbring, 2006), kan man tenke seg at individet utvikler sin forståelse gjennom sin tolking av materialet som brukes. Konkretene skal bare være hjelpemidler, og er ikke direkte visualiseringer av en ide eller et konsept. Det er derfor viktig å være bevisst på bruken av konkreter, slik at de ikke er til hinder for læringsprosessen (Kaufmann, 2010).

Etter hvert som elevene blir eldre, blir matematikken mer abstrakt, og det nye man møter kan være vanskelig å forstå. Et tegn kan ha flere betydninger, og det kan skape en utfordring for den lærende. Tolking av ny kunnskap, og da mediering mellom ulike representasjoner, vil da være avhengig av individet (Steinbring, 2006, s. 144). Som konstruktivismen viser til, så er meningsskaping en kontinuerlig prosess (Imsen, 1998).

I prosessen med å konstruere kunnskap mellom begrepet og symbolene, og opp mot de ulike aspektene, krever det at man bruker tid og gjennomtenkte læringsdesign (Kilpatrick et al., 2001, s. 246). Sett opp mot dagens læreplan, kan dette legges til rette for gjennom dybdelæring. Undervisningen er sentral for elevers forståelse (Bjerke & Pettersen, 2012; Tsai & Li, 2017). Variasjon i representasjonsformer bør vektlegges, da forståelse og ferdigheter innenfor brøk er essensielt for andre matematikkemner; særlig måling, algebra og geometri (Tsai & Li, 2017). Sentralt for undervisning og læring er også lærernes egen forståelse av brøk (Tsai & Li, 2017, s. 245–246).

Gjennom de foregående delkapitlene har vi sett på kompleksiteten bak begrepet brøk, semiotikkens rolle, og årsaker til elevers utfordringer. Som følger av utfordringene, er det mange elever som havner i misoppfatning. Dette er temaet for neste delkapittel.

2.6 Misoppfatninger

Forskning rettet mot elevers tanker og misoppfatninger har vært av interesse innen utdanning over lang tid (Stein et al., 2008). De siste årene har forskningen fått et større fokus på misoppfatninger da det blir sett på som en av de største barrierene for læring i matematikk (Ay, 2017).

Hansen (2020) beskriver misoppfatninger som når en persons oppfatning av et konsept kommer i konflikt med meningen av et konsept og forståelsen av matematikk. Misoppfatningene kan ha rot i elevers forkunnskap, som da har blitt generalisert på en uheldig måte (Im & Jitendra, 2020). De anser det de holder på med som riktig, eller så vet de gjerne ikke hva de holder på med (Neidorf et al., 2020; Rushton, 2014). En feil kan gjerne oppstå fordi man er litt uoppmerksom og gjerne ikke sjekker de svarene man har fått, eller det rett og slett blir en kognitiv overbelastning (Hansen et al., 2020; Ryan & Williams, 2007, s. 13). De dyptgående misoppfatningene kan gjøre det vanskelig for elever å forstå andre matematiske konsept, og kan også føre til repeterende feil (Im & Jitendra, 2020). Gjentakende feil kan føre til at elever presterer lavt, som igjen kan skape negative holdninger til faget og gå utover elevenes motivasjon (Belbase, 2013).

Elevers tidligere læringserfaring kan også føre til misoppfatninger (McNeil & Alibali, 2005). Man kan si at misoppfatninger er konsekvenser av elevers forsøk på å konstruere egen kunnskap (Brodie, 2014; Olivier, 1989). Her er forkunnskap og elevers tolking særlig relevant. Misoppfatningene kan bygge på tidligere erfaring. Det kan knyttes til konstruktivistiske teorier og syn på feil som en del misoppfatninger eller konseptuelle strukturer som følge av underliggende misoppfatninger (Vermeulen & Meyer, 2017). På den måten, kan misoppfatningen føre til feil, og derfor kan misoppfatninger og feil sees på som en sammenhengende konstruksjon av misforståelser i stedet for to ulike enheter (Bush, 2011; Tendere & Mutambara, 2020). Dersom feil blir rettet på med en gang uten at man analyserer hvorfor de oppstår, så kan feilene fortsette å gjenta seg (Chi & Roscoe, 2002).

Begrepet misoppfatninger kan sees på fra to ulike perspektiv (Leonard et al., 2014; Maskiewicz & Lineback, 2013). Et perspektiv er å se på misoppfatninger som en ulempe, og at det kan være en hindring for videre læring. Da mener man kanskje at det er noe som må avdekkes og fjernes. Et annet perspektiv er å se på misoppfatninger som noe produktivt som kan implementeres i selve undervisningen (Swan, 2001). De oppfatningene som elever har til et begrep kan brukes som en ressurs inn mot en mer fullstendig begrepsforståelse (Hansen et al., 2020). Det gir også en god forståelse for hvordan elevene da tolker og forstår de ulike matematiske objektene som de møter (Cockburn & Littler, 2008; Ryan & Williams, 2007). Det er viktig å tenke på hvordan man som lærer adresserer misoppfatninger, og at man har elevenes læring i fokus.

Elevers feil og misoppfatninger innenfor matematikk kan spille en konstruktiv rolle i klasseromsdiskusjoner (Hiebert et al., 1997). Det er derfor sentralt at man som lærer tar tak i de feilene og misoppfatningene som oppstår (Skott, 2019). Misoppfatninger og feil kan være en naturlig læringsaktivitet (Hansson, 2020). Sett fra et konstruktivistisk perspektiv, så kan misoppfatninger ha en avgjørende rolle i undervisningen da de både er forstyrrelser og produktive aktiviteter som kan bidra til konstruering av matematisk forståelse. Ifølge Piaget (1970), kan ikke barn lære matematikk ved å memorere og internalisere regler og former som blir gitt dem av en ekstern autoritet. De lærer matematikk ved å konstruere mening gjennom egne kognitive evner. På den måten kan man si at de feilene som oppstår, de oppstår fordi barn tenker (Brodie, 2014; Olivier, 1989). Ifølge Matematikksenteret (2019j) er misoppfatninger en naturlig del av læringsprosessen.

Forskere har lenge sagt at læreres kunnskap om vanlige misoppfatninger kan være avgjørende for elevers læring (Sadler & Sonnert, 2016). Swan (2001, s. 150) mener at man bør ta imot feil og misoppfatninger med åpne armer, jobbe med det eksplisitt i undervisningen, og diskutere det for at elevene skal få en dypere forståelse. I følge Ay (2017), så kan alle misoppfatninger defineres som feil, men det er ikke alle feil som kan defineres som misoppfatninger. Brekke (2002, s. 10) sier at misoppfatninger ikke er tilfeldige feil, men en konsekvent idé som ligger bak. Det vil si at ved en misoppfatning, vil idéen som ligger bak, føre til repeterende feil.

I mange tilfeller kan man som lærer forutse noen av de feilene som kan oppstå i møte med ulike konsept og oppgaver. Tabell 1 viser til overflatekunnskap og dypere forståelse hos elever, hvordan de løser oppgaver med prosedyre og feil som kan oppstå, og hvordan man som lærer jobber med det. Enkelte feil kan gjerne ligge på overflaten, de er lette å observere, og kan enkelt rettes opp i. Det er de dypere feilene og misoppfatningene som krever litt mer arbeid. Ryan og Williams (2007) sier at misoppfatninger på et dypere nivå er krevende, selv for den erfaringsrike læreren. Det krever at man vet hva man skal se etter, og hvilke strategier man skal bruke for å skape en kognitiv konflikt (Ryan & Williams, 2007, s. 16). Det handler om å kunne ha en samtale om misoppfatningene og hvorfor det er feil.

Tabell 1

Overflatekunnskap og dypere forståelse, vurdering og pedagogikk

	Elevkunnskap	**Vurdering**	**Pedagogikk**
Overflate: respons på oppgave	Prosedyre/ feil	Dokumenter/ observer/ kategoriser	Rett på feilen
Dypere: forklaring/ resonnement/ rettferdiggjøring	Mis/oppfatning Understøttende/ rettferdiggjøring	Diagnostiser/ forklar Tolk/ teoretiser	Dialog om misoppfatning/ resonnement/ konflikt

Note: Oversettelse av tabell fra Ryan & Williams (2007, s. 15).

Her kan man da skape en kognitiv konflikt der det da blir ubalanse (assimilasjon), for så å endre oppfatningene hos eleven (akkomodasjon). Piaget (1970) viser til hvordan læring skjer når kognitive konflikter løses. Læringen skjer ved å forhandle og reforhandle mening (Karlsen & Klaveness, 2019, s. 109). Å løse opp i misoppfatninger er noe som krever både tid og planlegging (Hansen et al., 2020, s. 14). Ryan og Williams (2007, s. 16) viser til barns konseptuelle utvikling, og hvordan feil og misoppfatninger kan knyttes til begrensinger i elevers forståelse på ulike nivå i den utviklingen. Det handler om å forstå hvor eleven er i sin utvikling, og hvordan man kan ta tak i det på et tidlig stadium for å unngå problemer senere i skoleløpet.

Det er mange ulike misoppfatninger som elever kan ha innen matematikk. «Multiplikasjon gir et større tall» og «divisjon gir et mindre tall» er noe man har med seg fra arbeid med naturlige tall. En slik generalisering gjelder for naturlige tall, men det gjelder ikke for alle tall (Kilpatrick et al., 2001, s. 239). Dette er noe som elevene kan ha utfordringer med. Multipliserer man med en brøk som er mindre enn 1, så vil resultatet bli mindre. Et eksempel på dette er $\frac{2}{5}$ x 10 = 4, som da er mindre enn 10. På samme måte vil en divisjon med en brøk mindre enn 1 kunne gi et større tall. Et eksempel på dette er $10 \div \frac{2}{5} = 25$, som da er større enn 10. På samme måte som elever kan ha utfordringer med multiplikasjon og divisjon, så kan de også ha utfordringer mer addisjon og subtraksjon av rasjonale tall. Dette kan man se ved at de legger sammen teller og teller, og nevner og nevner i addisjon, eller trekker fra i subtraksjon. Et eksempel på det kan være $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{9}$.

Misoppfatninger er en naturlig del av læringsprosessen (Brekke, 2002; Hansen et al., 2020, s. 3; Matematikksenteret, 2019j). Man kan si at misoppfatninger er noe elevene er i, og at det ikke er noe de har. Dette er på bakgrunn av at de trekker ugyldige slutninger og da generaliserer på et sviktende grunnlag (Matematikksenteret, 2019a). Det kan tolkes slik at det er en prosess som elevene er i, men som de da kan komme ut av. Likevel er det elever som er i misoppfatning gjennom hele skoleløpet, og som har de utfordringene senere i livet (Brekke, 2002). Neste delkapittel tar for seg misoppfatninger knyttet til brøk.

2.7 Misoppfatninger knyttet til brøk

Gjennom forskning har man kommet frem til flere misoppfatninger som er vanlige innenfor emnet brøk (Bjerke et al., 2013; Clements et al., 2013; Hansen et al., 2020; Neagoy, 2017; Ryan & Williams, 2007). Disse har kobling til elevers forståelse av brøkbegrepet. Som nevnt, har det vært gjort forsking på dette i Norge også**.** I prosjektet «Fra misoppfatning til mestring» (FRAMM)[6], som ble utført av Matematikksenteret i perioden 2014-2018, ble flere misoppfatninger kartlagt (Matematikksenteret, 2019b). Prosjektet gikk ut på å teste elever innenfor ulike emner i matematikk, hvor man så fant ulike misoppfatninger hos elevene. Misoppfatningene som trekkes frem i denne studien er **«**nevneren representerer antall deler, uavhengig av størrelsen», «jo større nevneren (eller teller), jo større brøk», «brøkstrek er lik desimalkomma», «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken», og «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall» (Matematikksenteret, 2019b)**.**

Misoppfatningene som er omtalt i denne studien, er knyttet til de tre aspektene som er nevnt tidligere. De relaterer til elevenes utfordringer med å se brøk som en tallstørrelse i seg selv. Misoppfatningene blir nå beskrevet i underkapitlene.

2.7.1 «Nevneren representerer antall deler, uavhengig av størrelsen»

En av de misoppfatningene man ser på når det gjelder brøk, er brøk knyttet til størrelse. I denne sammenhengen er det normalt at elevene kan tenke at delene kan ha ulik størrelse så lenge det er riktig antall deler; at delene ikke er like store (Clements et al., 2013; McIntosh, 2007). Dette er noe man kan kjenne igjen fra dagligspråket når man hører noen si «jeg fikk den største halvparten». Dersom en elev svarer at arealmodellen i figur 7 er en representasjon av $\frac{1}{3}$, kan det være et tegn på at eleven er i misoppfatning. Eleven ser ikke på størrelsen på delene, bare antall deler. Her ser man en tydelig kobling til aspektet del-hel og det å dele likt.

[6] Prosjektet het FRAMM i en periode, men heter nå Misoppfatninger i matematikk.

Figur 7.

Eksempel på en feil representasjon av brøken 1/3.

2.7.2 «Jo større nevneren (eller teller), jo større brøk»

Når elever skal vurdere verdien av en brøk, eller størrelsen, kan elevenes heltallstenking skape utfordringer. Dette er knyttet til det jeg skrev om «whole number bias». Elevene vil bruke kunnskapen de har om naturlige tall, og se på telleren og nevneren som rene tallstørrelser. De vil ikke ta hensyn til forholdet mellom teller og nevner (Matematikksenteret, 2019g). Et eksempel på dette er brøkene $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{8}$, hvor elever med denne misoppfatningen vil si at $\frac{1}{8}$ er størst fordi 8 er større enn 4. Her vil eleven kun fokusere på sifferet i nevneren, og ikke størrelsen på delene. Her bruker eleven sin forkunnskap om hele tall for å avgjøre hvilken som er størst (Hansen et al., 2020; Stafylidou & Vosniadou, 2004). En viktig del av brøksforståelsen her, er å forstå at jo høyere tall det er i nevneren, jo mindre er delene (Behr et al., 1983; English & Halford, 1995, s. 140).

2.7.3 «Brøkstrek er lik desimalkomma»

Misoppfatninger kan også knyttes til symboler og notasjon. Konseptet brøk kan for mange være vanskelig. Det å forstå at en brøk representerer en tallstørrelse og en verdi er utfordrende; mål/størrelse aspektet. Dette er fordi man har to siffer som er plassert på hver sin linje. Man kan ha elever som betrakter brøkstreken som et skilletegn mellom teller og nevner, og at teller og nevner representerer heltall (Brekke, 1995, s. 26; Hiebert & Wearne, 1983; Matematikksenteret, 2019c). I noen tilfeller kan elever se på tegnet som minustegn. Eksempel på dette er når man skal gå mellom representasjoner; fra brøk til desimal. Elever tenker gjerne at man skal ha 0 først, og så trekker de teller fra nevner. I andre tilfeller ser de på brøkstreken som en desimalkomma. Matematikksenteret viser til eksempelet $\frac{2}{5}$ og hvordan det blir tolket som 2,5.

Når elever skal symbolisere desimaltall, kan de overse desimaltegnet eller se det som et skilletegn. Noen tolker derfor brøkstreken som desimalkomma når de går mellom representasjonsformene brøk og desimaltall. Da endrer de fra brøkstrek til desimalkomma som skilletegn mellom teller og nevner (Matematikksenteret, 2019d). Det er en mangelfull forståelse av brøkstreken som tegn.

Sett ut fra beskrivelsene til Matematikksenteret, vil elever kunne vurdere størrelsen på en brøk ut fra teller eller nevner. Man kan også lure på om det kan gå begge veier. Den ene veien gjør man om fra brøk til desimal ved å endre brøkstreken til desimalkomma. Om man går motsatt vei og skal lage en brøk ut fra et desimaltall, vil man kunne bestemme nevner ut fra tallet på høyre siden av desimalkomma. I andre misoppfatninger knyttet til brøk, vises det til elever som eksempelvis skriver 0 i teller og 1 i nevner med utgangspunkt i desimaltallet 0,1. Man kan si at det foreligger en mangelfull forståelse for brøk og verdien av en brøk (Matematikksenteret, 2019e).

2.7.4 «Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken»

Denne misoppfatningen er knyttet til både sammenligning av størrelser og likeverdige brøker; forhold aspektet. På samme måte som i misoppfatningen «jo større nevneren (eller teller), jo større brøk», vil elevene se på teller og nevner som uavhengige tallstørrelser. I denne sammenhengen ser de på differansen mellom teller og nevner når de avgjør størrelsen. Her er det en forvirring rundt tall og hva de representerer (Mitchell, 2005).

I sammenligning av størrelser, vil elevene vurdere den brøken som har minst differanse som størst (Matematikksenteret, 2019h**)**. I noen tilfeller vil feiltenkingen kunne gi riktig svar, så det er viktig at man velger riktig type oppgave for å avdekke denne feiltenkingen. Matematikksenteret viser til eksempelet hvor man sammenligninger av $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{5}$. Her vil feiltenkingen gi rett svar. Det vil også fungere dersom man sammenligner brøker med samme nevner.

I tilknytning til likeverdige brøker**,** vil elevene tenke at brøkene er like store dersom differansen mellom teller og nevner er lik (Bondø & Tokle, 2018; Hansen et al., 2020; Matematikksenteret, 2019h)**.** Her vil elevene kunne si at $\frac{2}{5}$ er det samme som $\frac{6}{9}$ fordi differansen er den samme. Elever kan si at brøkene mangler like mye for å få en hel. Denne type misoppfatning bli også omtalt som «gap thinking» i internasjonal forskning, og regnes som en av flere heltallsstrategier (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010; Pearn & Stephens, 2004).

2.7.5 «Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall»

Denne misoppfatningen er knyttet til synet på teller eller nevner som en del av helheten. I noen tilfeller kan elever forholde seg til kun en av dem når de jobber med brøk. De vil i noen tilfeller kunne får rett svar, selv om de kun ser på ett av sifrene i brøken (Hansen et al., 2020; Matematikksenteret, 2019f). Matematikksenteret viser til to eksempel hvor man kan se teller som et isolert tall. Dersom en elev skal finne $\frac{1}{3}$ av tre sirkler, fargelegger eleven en sirkel da den kun ser på telleren. Om man da har en pizza delt i åtte deler, og spør etter $\frac{1}{4}$, vil eleven svare ett stykke og ikke to. Da vil misoppfatningen synliggjøres.

Da et rasjonalt tall kan representeres på mange ulike måter, kan det være utfordrende å representere det med passende symbol ut fra kontekst. Dette blir omtalt som et «syntaktisk» oversettelsesproblem hvor et skriftlig symbol må bli oversatt til et annet gjennom en sekvens av regler (Kilpatrick et al., 2001, s. 234). Kilpatrick et al. (2001) sier at de symbolske representasjonene knytt til rasjonale tall skaper et «semantisk» problem. Hvert symbol betyr noe. Semantikken ser på ordets mening, og er knyttet til semiotikk. Det handler om å se representasjonene og forstå den meningen som ligger bak.

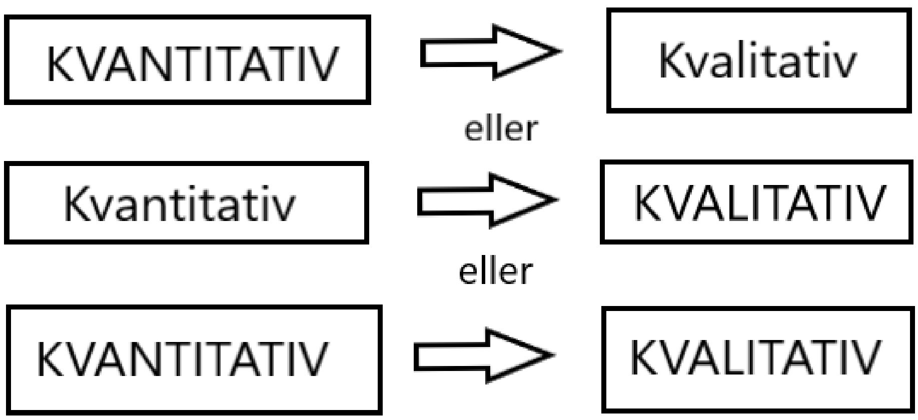
3 Metode

I dette kapittelet blir forskningsdesignet presentert. Her belyser jeg fremgangsmåte og valg som er gjort underveis, valg av metode for datainnsamling og analyse, en vurdering av validitet og reliabilitet, og til slutt viser jeg til etiske vurderinger.

Selve forskningsdesignet og valg av metode, er avhengig av forskningsspørsmål. I denne studien har jeg kombinert kvantitative og kvalitative data for å få en dypere forståelse av det jeg skal undersøke. Sale et al. (2002, s. 48) refererer til Denzin (1970), som sier at ved å bruke mixed-methods, kan man få flere datakilder knyttet til det man vil undersøke, og det kan gi en mer fullstendig forståelse av fenomenet. Det vil si at man bruker både kvalitative og kvantitative metoder i en og samme undersøkelse (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 23). I det man kaller *explanatory-sequential approach*, følger man opp den kvantitative dataen med kvalitativ data (Edmonds & Kennedy, 2017). Her vil man gjerne få en forklaring på det kvantitative gjennom det kvalitative. Vektleggingen er avhengig av fokuset i studien. Som figur 8 viser, så kan man vektlegge ulikt. Denne studien vektlegger det kvantitative, men med støtte i det kvalitative.

Figur 8.

Vektlegging innenfor explanatory-sequential design.



Note: Oversettelse av modell fra Edmonds & Kennedy (2017, s. 196).

Her kan det kvalitative gi en nyansert innsikt i de objektive dataene man får fra det kvantitative (Befring, 2015, s. 41). Med andre ord så har metoden ulike fordeler. Det kvantitative gir et bilde av situasjonen der og da, mens det kvalitative kan gi et svar på hvorfor man gjør og tenker som man gjør. Jeg har valgt å bruke et oppgavesett og semistrukturert intervju i datainnsamlingen. Metoden ble også brukt i et tidligere feltarbeid.

Oppgavesettet gir kvantitative data knyttet til elevenes forståelse av brøk, mens intervjuet gir kvalitativ data i form av elevenes egen forståelse og deres forklaring. Knyttet til problemstillingen og forskningsspørsmålene, vil den kvantitative dataen legge grunnlaget for å kunne svare på forskningsspørsmålene. Det kvalitative er med på å gi mer informasjon om elevenes forståelse, og vil kunne være til støtte for analysene av det kvantitative. I de neste delkapitlene vil jeg gå nærmere inn på forskningsdesginene innenfor det kvantitative og det kvalitative.

3.1 Kvantitativ

I denne studien er det kvantitative vektlagt, men med støtte i det kvalitative. I en kvantitativ studie, er det normalt å ha større mengder data. Slike mengder data kan forekomme som både tall og andre typer mengder (for eksempel ord som ofte, lite, sannsynlig, aldri) (Befring, 2015). Forskningsspørsmålene viser til utbredelse og sammenhenger, og det var derfor nødvendig å innhente en mengde datamateriale for å finne svar. Det er derfor brukt kvantitativ metode, som blir gjort rede for i dette delkapittelet.

Innenfor kvantitativ forskning ser man på numerisk datamateriale, og det er derfor en forutsetning at man representerer fenomenet man undersøker gjennom empiriske indikatorer (Muijs, 2011; Sale et al., 2002). Elevers forståelse kan være et slikt fenomen, da det ikke er kvantitativ til å begynne med. Man må derfor finne måter å konvertere forståelsen om til numerisk data, som så kan analyseres. Dette kommer jeg tilbake til i første underkapittel.

Det kvantitative området inneholder ulike forskningsdesign. De mest typiske er eksperimentelle og deskriptive design. Eksperimentelle forskningsdesign har som formål å forklare årsakssammenhenger, og legger til rette for en systematisk effektundersøkelse (Befring, 2015, s. 84). I denne typen design har man en eksperimentgruppe og en kontrollgruppe, og så sammenligner man gruppenes resultat. Et eksempel på dette er en studie av Moss & Case (1999), hvor undervisning av rasjonale tall og hvilken rekkefølge de ble presentert ble testet ut. Deskriptive design har et beskrivende formål. I motsetning til det eksperimentelle, så forsøker man å beskrive virkeligheten uten å forklare årsakssammenhengene. Innenfor det deskriptive vil man gjennom analysene få svar på spørsmål i kategorien: *hva, hvordan, hvor mye, hvor mange, hvem* (Apuke, 2017; Befring, 2015). I denne studien ser jeg på utbredelse, som igjen kan knyttes til hvor mye og hvor mange, og en deskriptiv design er med på å kunne svare på det.

Kvantitative metoder blir brukt når man ønsker å generalisere noe, og blir brukt i større undersøkelser (Befring, 2015, s. 40). De mest vanlige metodene er tester og spørreundersøkelser. For å samle inn datamateriale i denne studien, er det brukt et oppgavesett som fungerer som en test der elevene skal svare på oppgaver som skal avdekke mulige misoppfatninger.

3.1.1 Test som metode

Innen kvantitativ forskning har bruken av tester vært vanlig over lang tid. Som nevnt tidligere, så har man store internasjonale undersøkelser slik som TIMSS og PISA. Dette er undersøkelser som bruker tester for å undersøke elevers kompetanse innenfor matematikk. Tester er brukt som måleinstrument innenfor psykometri (gren av psykologi), og brukes for måling av begrep (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 49). I denne studien vil begrepene være brøkforståelse og misoppfatninger.

Denne studien har et deskriptivt design, og ordet deskriptivt viser til beskrivelse; man skal beskrive noe. Da formålet med studien er å se på utbredelse av misoppfatninger hos elever på 5 trinn, og sammenhenger mellom de misoppfatningene, vil en test være formålstjenlig (Befring, 2015; Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 51). Resultat fra en test kan gi store mengder data. Derimot er det viktig å tenke på hva man vil få ut av denne dataen, da dataen isolert sett har liten informasjonsverdi (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 49). Som nevnt i starten på delkapittelet må man konvertere forståelsen om til numerisk data. Elevenes besvarelser kan gi innsyn i elevenes forståelse, men det er avhengig av oppgavenes design. Ved å designe oppgavene på en måte slik at forståelsen kan måles, kan man da få data som igjen kan analyseres og tolkes. Som oppgavesettet (vedlegg 1) viser, så er det ulike svaralternativ. I tolkingen av analysen kan man ikke vite om elevene har tippet svarene, eller om det bygger på en forståelse (McIntosh, 2007). Ved å se på elevens svar opp mot andre svar i elevens besvarelse, kan man få en indikasjon på om eleven bare har gjort en feil, eller om det kan foreligge misoppfatninger.

Fordelen med å bruke en test, er at den kvantitative dataen man innhenter, vil være objektiv til en viss grad. Dette kan begrunnes i at kvantitative metoder holder en viss avstand mellom forsker og deltakere (Kleven & Hjardemaal, 2018). Det kan tolkes som at forsker da har mindre påvirkning. Likevel, har man som forsker en innvirkning på den dataen man innhenter (Kleven & Hjardemaal, 2018). Dette er både i form av utvalg, sammensetting av oppgavesett, og fortolkning av resultat. Testens objektivitet, vil også være avhengig av testens format og hvordan testen gjennomføres. En test man kan gjennomføre elektronisk, vil være mer objektiv enn en test i papirform da alle svar registreres med en gang, og ikke gir samme rom for tolking. Den vil også være mer tidsbesparende med tanke på å legge inn resultat til analyse (Opsvik & Skorpen, 2017, s. 259). Her kreves det likevel at alle eleven har tilgang på en pc samtidig, og legger mer arbeid på lærerne. I papirform åpnes det for subjektiv vurdering og rom for tolking. Dette gjelder spesielt åpne oppgaver hvor elevsvar må tolkes. Oppgavesettet som ble brukt i denne studien var i papirformat, og bestod av noen åpne oppgaver. Det var derfor viktig at de oppgavene som var åpne, ble vurdert så objektivt som mulig. Her hadde jeg kriterier som besvarelsene måtte gå gjennom. Dette kommer jeg tilbake til i neste underkapittel (3.1.2). Fordelen med papirform er at det er enklere å gjennomføre i et klasserom, da det ikke krever store forberedelser (Opsvik & Skorpen, 2017). Her må man derimot legge inn all dataen for hånd.

Bruken av tester innenfor forskning ser man i slik som SPEED-prosjektet, KIM-prosjektet og FRAMM-prosjektet. I denne studien har jeg satt sammen et oppgavesett. De fleste oppgavene er utviklet av andre, og noen oppgaver er variasjoner av andre oppgaver. Dette er med på å vurdere validiteten i oppgavesettet. Dette kommer jeg tilbake til i neste underkapittel (3.1.2) og underkapittel 3.1.4.

Cohen et al. (2018) sier at man som forsker må være oppmerksom på flere ulike ting når man skal utvikle tester. Det er derfor viktig å være bevisst på hva som er hensikten med testen, testens innhold, omfang, validitet og reliabilitet. Når det gjelder selve oppgavene, må man tenke på format, vanskegrad og hvor vidt oppgaven er egnet for formålet. Dette var noe jeg måtte tenke over når jeg satt sammen mitt oppgavesett. Vanskegraden kan vurderes ut fra den prosentverdien hver oppgave har. Det vil si antall elever som svarer riktig på oppgaven (I. Throndsen & Alseth, 2012, s. 194). Når det kommer til oppgavenes diskriminering, så ser man på om oppgaven skiller mellom faglig svake og faglig sterke elever. Her vil jeg undersøke oppgavenes diskriminering. Dette gjøres ved at jeg regner ut «point-biserial- korrelasjon», mellom elevenes svar på den enkelte oppgaven og prosent på hele prøven, ved bruk av Pearsons r (Field, 2013, s. 279). Det viser da til samvariasjonen mellom de enkelte oppgavene og det samlede resultatet. Dersom det er mange elever med en lav skåre samlet sett som også gjør det svakt på den oppgaven som vurderes, vil man få høy grad av samvariasjon og oppgaven har høy diskrimineringsverdi. Dette gjelder også om det er elever som har en høy samlet skåre, og som da svarer rett på den oppgaven. Ved verdier under 0,3 på en oppgave, er det en indikasjon på at oppgavene kan være for vanskelige eller for lette (Opsvik & Skorpen, 2017, s. 268).

3.1.2 Oppgavesettet

Denne studien inneholder et oppgavesett (vedlegg 1) som er utarbeidet fra tidligere kartleggingsprøver og tester. Dette er oppgaver som tidligere er godt utprøvd og validert. I arbeidet med oppgavesettet ble jeg inspirert av en annen masteroppgave som har sett på samme tema som meg (Vinje, 2019). Det ble gjort omfattende og grundige undersøkelser av oppgaver som kunne brukes, og det var inkludert oppgaver fra både nasjonale og internasjonale studier. Da det var begrenset hvilke oppgaver som var tilgjengelige, så ble utfallet at oppgavesettene ble noe like. Dette kan også begrunnes med at man har valgt de samme misoppfatningene. At oppgavesettene er like, kan være en styrke, da oppgavene allerede er utprøvd. Det legger også til rette for sammenligning av resultat.

Oppgavesettet i denne studien består av oppgaver som i utgangspunktet skal være diagnostiske (Brekke, 2002). I arbeidet med å kartlegge misoppfatninger, brukes det diagnostiske oppgaver (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 51). Brekke (2002, s. 16) sier at diagnostiske oppgaver inneholder spørsmål som elever vil ha problemer med å svare på, og at man unngår spørsmål hvor eleven kan få riktige svar selv om de har misoppfatninger. Målet er å gi informasjon om hvordan elevene tenker, hvor de er i læringsprosessen, hvilke løsningsstrategier de bruker, hva man må jobbe videre med, og om undervisningen har hjulpet elevene (Brekke, 2002, s. 16). Informasjonen kan bidra til å se hvilke styrker og svakheter som elevene kan ha knyttet til et fagområde (McIntosh, 2007). I diagnostiske oppgaver, vil ikke eleven kunne svare riktig dersom den har en mangelfull forståelse knyttet til begrepet (Brekke, 2002, s. 16). Oppgavesettet i denne studien kan derfor defineres som en diagnostisk test.

Oppgavesettet inneholder 20 oppgaver som er knyttet til emnet brøk, og grunnleggende forståelse innenfor tre av fem aspekt. Oppgavene skulle avdekke om elevene viste tegn på misoppfatninger innenfor brøk, og er avgrenset til de misoppfatningene som ble gjennomgått og avgrenset i kunnskapsgrunnlaget (se kapittel 2). De resultatene man får som følge av misoppfatninger er knyttet til en konsekvent feiltenking, og er ikke tilfeldige feil (Brekke, 2002). I følge kompetansemålene etter 5. trinn (Utdanningsdirektoratet, 2020), skal elevene kunne

- «utforske og forklare sammenhenger mellom brøker, desimaltall og prosent og bruke det i hoderegning.»
- «beskrive brøk som del av en hel, som del av en mengde og som tall på tallinjen og vurdere og navngi størrelsene.»
- «representere brøker på ulike måter og omsette mellom de ulike representasjonene.»

På bakgrunn av kompetansemålene valgte jeg å ha flere oppgaver innenfor hver av misoppfatningene, da dette er områder som elevene skal være innom i løpet av skoleåret. For å avdekke om elevene hadde misoppfatninger, inkluderte jeg minimum tre oppgaver innenfor hver misoppfatning. Dette var for å se om det var tilfeldige feil, eller tegn på misoppfatning. Som vist til i teorien, så er variasjon av representasjonsformer innenfor de ulike aspektene viktig. Det var derfor noe jeg prøvde å få til i oppgavene også. Endring av representasjonsform kan ha stor påvirkning på elevprestasjoner (Moskal & Magone, 2000, s. 318). Som nevnt i forrige underkapittel, så er oppgavene designet slik at man kan analysere ut fra elevenes besvarelser. Ved å se på elevens svar opp mot andre svar i elevens besvarelse, kan man få en indikasjon på om eleven bare har gjort en feil, eller om det kan foreligge misoppfatninger.

Oppgavene er i hovedsak hentet fra FRAMM-prosjektet og KIM-prosjektet (Brekke, 1995; Matematikksenteret, 2019a), tidligere nasjonale prøver (Utdanningsdirektoratet, 2021), kartleggingsverktøyet Alle Teller (McIntosh, 2007), SPEED-prosjektet (Opsvik & Skorpen, 2012), og to studier med søkelys på misoppfatninger (Clements et al., 2013; Pantziara & Philippou, 2012). Enkelte oppgaver i oppgavesettet er variasjoner av oppgaver man kan finne i kildene som er nevnt. Dette er omtalt i et eget valideringsskjema for oppgavesettet (i vedlegg 3), men blir også utdypet lenger nede i underkapittelet. En av fordelene med å bruke oppgaver fra andre prøver, er at de har vært gjennom flere prosesser og har en kvalitetssikring (Opsvik & Skorpen, 2017). Oppgavene varierte mellom flervalgsoppgaver og kortsvarsoppgaver. Det vil si at de skulle svare ved å markere riktig svaralternativ, eller avgi svar ved å skrive inn det de mente var riktig. I flere av oppgavene skulle elevene forklare hvorfor de svarte som de gjorde. Forklaringene kan være med på å gi et dypere innblikk i elevenes forståelse av brøk og gir verdifull informasjon (Brekke, 2002, s. 16; Moskal & Magone, 2000, s. 313).

Den første misoppfatningen vi skal se på er «jo større nevner (eller teller), jo større brøk». Der finner man oppgave 1, 8, 11, 13 og 18. Disse oppgavene måler hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Elevene må altså ta stilling til brøkenes verdi sett opp mot hverandre. Her skal altså verdien av en brøk vurderes opp mot verdien av en annen brøk. Oppgave 1, 11, 13 og 18 er oppgaver som er hentet fra Alle Teller og FRAMM-prosjektet. Oppgave 8 er en variasjon av en oppgave jeg fant i Alle Teller.

Her er det fremstillingen som er endret. Her var det oppgaver av ulik vanskegrad. I oppgave 8 (figur 9) skal elevene sortere etter størrelse.

Figur 9.

Ser om elever ser på sifferet i nevner når de avgjør størrelsen

Oppgave 8

Sorter brøkene ut fra verdi.

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{3}$$

_____ _____ _____ _____ _____

Minst Størst

Oppgave 2, 6, 15, 17 er kategorisert under misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Oppgavene måler hvor vidt elevene ser på differensen mellom teller og nevner når de avgjør størrelsen på brøken. Vanskegrad på oppgavene ble også et tema i arbeidet med oppgavesettet. Bakgrunnen for å ha ulik vanskegrad ligger i at det skal være utfordrende for de elevene som vil prestere på et høyt nivå. Samtidig kan elever få riktig på oppgaver av lavere vanskegrad, selv om de egentlig har gjettet svaret. Ved å ha vanskeligere oppgaver, kan man får frem misoppfatningene tydeligere.
Oppgave 17 er hentet fra FRAMM-prosjektet. Det gjelder også de andre oppgavene, men de er variasjoner. Her har jeg endret på sifrene i svaralternativene. Oppgave 6 og 15 (figur 10) har ulik vanskegrad da oppgave 6 er dobling, mens i oppgave 15 skal elevene finne ut hvor mange femtendeler som tilsvarer $\frac{2}{3}$. Elever som viser tegn på «gap thinking» vil i dette tilfellet svare $\frac{14}{15}$.

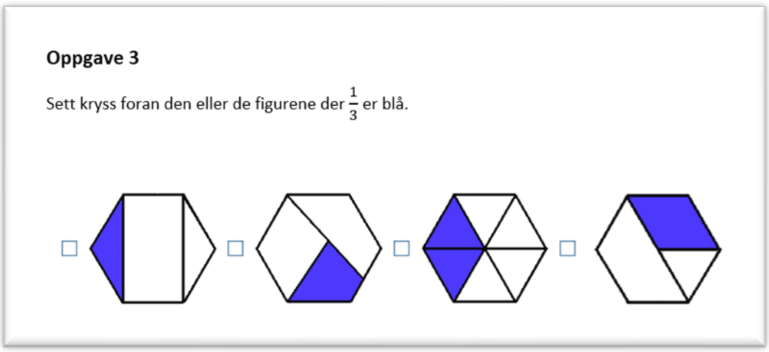
Figur 10.

Ser om elevene ser på differansen mellom teller og nevner når de fyller ut.

Under «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» finner man oppgave 3, 7, 12, 16, 19. Oppgavene måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen på delene spille noen rolle. Oppgavene under denne misoppfatningen er representert gjennom ulike arealmodeller. Her er oppgave 3, 7 og 12 variasjoner av oppgaver fra FRAMM-prosjektet. I oppgave 12 skulle elevene lage en figur selv, og her var det interessant å se om de tenkte over at delene skulle være like. For å få en objektiv vurdering av besvarelsene, ble det lagt til kriterier. Her var kriteriene at delene måtte være like, og at det var én del som var skravert. Både arealmodeller og mengdemodeller var godkjent. I oppgave 3 (figur 11) var det figurer som var delt opp ulikt. Her valgte jeg å endre den siste figuren fra den originale. Dette gjorde jeg ved å endre den skraverte delen til $\frac{1}{3}$, mens de andre delene var ulike. Man fikk da se om elevene kunne se at $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{6}$ er det samme.

Figur 11.

Vurdering av delenes størrelse, samt likeverdige brøker.



Ved å dele opp i ulike deler tvinger man elevene til å gå utenom vanlig prosedyre, og da vise at de har kunnskapen til å se at det hele må deles opp i mindre like deler for at den skraverte delen skal vise brøken (Pantziara & Philippou, 2012). I oppgave 7 ble flagget er endret. Oppgave 16 er hentet fra Pantziara og Philippou (2012), og oppgave 19 er hentet fra Clements et al. (2013). Disse oppgavene er det ikke gjort noen endringer på, men det kan diskuteres om det språklige i oppgaveteksten til oppgave 16 er godt nok.

Oppgave 4, 9, 13, 14 og 20 var kategorisert under misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma». Oppgavene måler hvor vidt elevene ser på brøkstreken som desimalkomma. Verdien av teller og nevner vil her være separate verdier. Oppgave 13 og 14 er hentet fra FRAMM-prosjektet og KIM-prosjektet. Oppgave 4, 9 og 20 er variasjoner av oppgaver fra FRAMM-prosjektet og SPEED-prosjektet. I oppgave 4 og 9 er sifrene endret fra de originale oppgavene. I oppgave 20 er figuren noe endret, og det ble lagt til flere alternativ. I utgangspunktet skulle hver enkel oppgave ta for seg én misoppfatning, og det gjelder for de fleste oppgavene. To av oppgavene tar for seg to ulike misoppfatninger, dette gjelder oppgave 13 og oppgave 20. I oppgave 9 (figur 12) skulle elevene gå fra desimaltall til brøk, og elever som ikke er bevisst på verdien av teller og nevner vil her kunne gå for

Figur 12.

Vurderer om elevene ser brøkstreken som desimalkomma.

Oppgave 9

Hvilken brøk har samme verdi som 0,23?

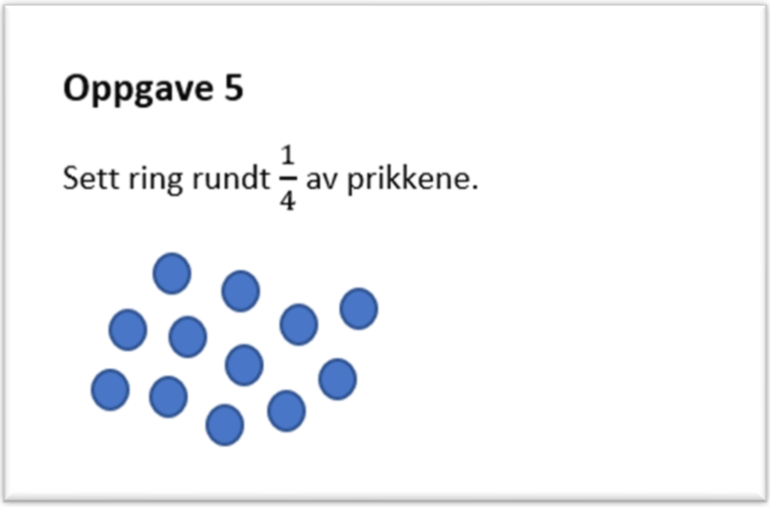
- ○ $\frac{0}{23}$
- ○ $\frac{1}{4}$
- ○ $\frac{23}{100}$
- ○ $\frac{2}{3}$

alternativ 1. Noen elever vil kanskje se på desimaltallet og tenke at det er nært 0,25 og da alternativ 2. I oppgave 4 og 14 skal de gå fra brøk til desimaltall, hvor oppgave 14 er en vanskegrad over oppgave 4. Dette kan begrunnes med at oppgave 4 kan utvides til tideler, som gjør det enklere for eleven å se hvilket svaralternativ som er riktig. Oppgave 14 har ingen svaralternativ, i tillegg til at det for mange elever kan det være vanskelig å se hvordan $\frac{2}{3}$ kan gjøres om til desimaltall, da man får rest.

Oppgave 5, 10 og 20 var kategorisert under misoppfatningen «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall». Her måler oppgavene hvor vidt elevene ser på telleren eller nevneren som et isolert tall. Elevene vil heller ikke ta hensyn til helheten. Her er alle oppgavene variasjoner av oppgaver. Oppgave 5 er en variasjon av enn oppgave fra FRAMM-prosjektet, hvor brøk og antall prikker er endret. Her er det ikke alternativ, men eleven som må svare selv. Oppgave 10 er en variasjon av en oppgave fra nasjonale prøver. Her er det brøken og figuren som er endret. Oppgave 20 er en variasjon av en oppgave fra SPEED-prosjektet, og måler to misoppfatninger. Her ble figur og svaralternativ endret. I oppgave 5 kan eleven for eksempel sette ring rundt én prikk eller fire prikker, i stedet for tre. Her kan man også få innsikt i om elevene forstår konseptet del av mengde. Oppgave 5 (figur 13) var representert med en mengdemodell, mens oppgave 10 og 20 var representert gjennom arealmodell.

Figur 13.

Brøk av mengdemodell



3.1.3 Pilotering av oppgavesett

Befring (2015, s. 80) sier at et av kjennetegnene ved en test, er at det er prøver som kan bestå av oppgaver som kan være empirisk utprøvd ved pilotering. I forbindelse med oppgavesettet, ble det gjennomført en pilotering. Dette var for å se om oppgaveteksten fikk frem det den skulle, og om elevene forstod hva de skulle gjøre. Piloteringen ble utført med to elever på 5. trinn fra en skole som ikke deltok i hovedinnsamlingen. Elevene gjennomførte oppgavesettet på cirka 15-25 minutter. Det viste seg at de elevene som var med i piloteringen var sterke elever i matematikk. Likevel hadde de utfordringer med et par oppgaver. Under samtale med elevene kom det frem at oppgavetekstene var tydelige, og at de forstod hva som ble spurt etter. Jeg hadde også samtale med faglærer som mente at de elevene som er på et lavere faglig nivå, vil kunne streve mer med oppgavene. På bakgrunn av resultatene og samtale med både faglærer og elevene, vurderte jeg at oppgavene ville treffe bra. Hovedtyngden av misoppfatninger ligger gjerne ikke hos de elevene som er faglig sterke. Da piloteringen kom tett på hovedinnsamlingen, fikk jeg ikke utført flere piloteringer. Hadde jeg hatt bedre tid, ville jeg utført en pilotering der utvalget som deltok, hadde vært elever som var mindre faglig sterke. Når det gjelder endringer som følger av piloteringen, så endret jeg på tre av oppgavene. På oppgave 3 ble det valgt å forandre blåfargen for å få frem linjene bedre. Dette kom ikke tydelig frem da det ble skrevet ut i papirform. Oppgavene 6 og 15 handler om utvidelse av brøker. Da begge oppgavene tok for seg dobling, så valgte jeg å øke vanskegraden på oppgave 15 ved å endre nevner der teller er ukjent. Der endret jeg til 15 for å øke vanskegrad fra dobling, samtidig som elevene må tenke seg nøye om før de svarer. Ved å ha vanskeligere oppgaver, kan man får frem misoppfatningene tydeligere. Dette kan være lurt da elever kan få riktig på oppgaver av lavere vanskegrad, selv om de egentlig har gjettet svaret (Brekke, 2002). I tillegg valgte jeg å sette inn et ekstra svaralternativ på oppgave 20. Det fjerde alternativet sier 0,8. Dette er for å se om elevene ser kun på de rutene som er fargelagt, og at teller da er et isolert tall.

3.1.4 *Oppgavesettets validitet og reliabilitet*

Reliabilitet vektlegger den presisjonen man har gjort i målinger og registreringer (Befring, 2015, s. 53; Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 99–100). Med andre ord viser det til nøyaktighetene og troverdigheten i empirien. Man skal kunne gjennomføre samme analysen med samme data, og få samme resultat. Reliabilitet i en test kan måles gjennom standardfeil eller ved reliabilitetskoeffisient (Kleven & Hjardemaal, 2018). Reliabilitetskoeffisienten kan man finne på ulike måter. I denne studien har jeg valgt å bruke Cronbach's Alpha. Cronbach's Alpha måler den indre konsistensen, og blir ofte brukt dersom man gjennomfører testen bare én gang (Bruin, 2011). Formelen for Cronbach's Alpha er:

$$\alpha = \frac{N\bar{c}}{\bar{v} + (N-1)\bar{c}}$$

N viser til antall variabler, $\bar{c}$ er den gjennomsnittlige samvariasjonen mellom variablene, og $\bar{v}$ viser til den gjennomsnittlige variansen. Verdien av reliabilitetskoeffisienten vil avgjøre om det er god reliabilitet eller ikke. Verdier over 0,7 er vurdert som akseptable, og verdier over 0,8 blir vurdert til god reliabilitet (Bruin, 2011; Cohen et al., 2018, s. 774). Verdien kan tolkes som 80% samvariasjon mellom resultat ved flere gjennomføringer (Cronbach, 1951). Reliabiliteten er som sagt et mål på den indre konsistensen i oppgavesettet. Derimot ser den ikke på antall områder testen måler. For å se på dette kan man utføre en faktoranalyse. Både Cronbach's Alpha og faktoranalysen kommer jeg tilbake til i resultatdelen.

I tillegg til reliabilitet, så har man validitet. Cohen et. al. (2018) viser til reliabilitet som en nødvendig betingelse for validitet. Med ulike definisjoner av validitetsbegrepet kan man se på om måleinstrumentet måler det det skal måle, om dataen vil gi et reelt bilde på fenomenet, og om fenomenet man undersøker er operasjonalisert på riktig måte (Befring, 2015; Cohen et al., 2018). Cohen et. al. (2018) går i dybden på validitet, og ser da på ulike typer validitet som kan knyttes til bruk av tester. Her har jeg valgt å se nærmere på konstruktvaliditet, innholdsvaliditet og kulturell validitet.

Konstruktvaliditet blir omtalt som en fundamental type validitet (Cohen et al., 2018, s. 256). Her ser man på den operasjonaliserte delen; måleinstrumentet. Det vil si validitet av testen, hva som testes og hva som måles. Med tanke på konstruktvaliditet, har jeg valgt å bruke oppgaver fra andre kartleggingsprøver og studier. Dette er oppgaver som er grundig tilpasset og måler det jeg skal undersøke. De har blant annet gått gjennom piloteringer, og har forklaringer til oppgavene som brukes. De fleste oppgavene er direkte koblet til de misoppfatningene jeg skulle undersøke. De oppgavene som er variasjoner av tidligere oppgaver, har små endringer som ikke skal ha noe å si for formålet bak den enkelte oppgaven. Som nevnt i underkapittel 3.1.1, vil jeg undersøke oppgavenes diskriminering ved å regne ut «point-biserial- korrelasjon». Oppgavenes diskriminering er viktig for oppgavenes innholdsvaliditet da man kan se om oppgavene er for lette, for vanskelig, eller om de diskriminerer med tanke på elevenes prestasjonsnivå.

Konstruktvaliditet er knyttet til innholdsvaliditet. Befring (2015, s. 80) sier at et av kjennetegnene ved en test, er at det er prøver som kan bestå av oppgaver som er testet for innholdsvaliditet og reliabilitet. Her må innholdet i testen vise at det dekker emnet på en god måte og representere de ulike sidene ved emnet (Cohen et al., 2018, s. 257). Når det kommer til innholdsvaliditet, har formålet med oppgaven vært ledende for hvordan jeg har gått frem. Med utgangspunkt i fem misoppfatninger, dekker studien kun en liten del av brøk som emne. Oppgavesettet tar kun for seg en grunnleggende forståelse av brøkbegrepet, og måler ikke alle misoppfatningene som er knyttet til emnet. Som nevnt, så ble misoppfatningene vektlagt i ulik grad. Det varierte fra tre til fem oppgaver for hver misoppfatning, men resultatene vil likevel kunne gi en indikator på hvordan elevene forstår brøk. Ved bruk av et valideringsskjema, har jeg beskrevet hva hver enkelt oppgave måler, og viser til hvilken misoppfatning de er kategorisert under. I etterkant har jeg kommet frem til at noen av oppgavene knyttet til misoppfatningene kunne vært representert på flere ulike måter. Dette kunne økt innholdsvaliditeten.

Til slutt vil jeg nevne kulturell validitet. Denne typen validitet ser blant annet på språket i oppgavene og om det er forståelig for målgruppen (Cohen et al., 2018, s. 264). Gjennom gode samtaler med veileder, og flere gjennomganger av oppgavesettet, kom jeg frem til et utvalg av oppgaver som kunne brukes. Vi diskuterte også språket, og var opptatt av at det skulle være enkelt for en femteklassing å forstå hva man skulle frem til. Her ble spørsmålene forenklet, og jeg prøvde å unngå avanserte ord eller for mange ord. I tillegg gikk oppgavesettet gjennom en pilotering, hvor deltakerne bekreftet at språket i oppgavene var forståelig.

3.1.5 Statistikk som metode for analyse

Ved bruk av et oppgavesett som elevene svarer på, fikk jeg data som kunne analyseres gjennom et statistikkprogram. Her brukes oppgavene, svar, poengsum og kategorisering av oppgavene utfra misoppfatninger. Da numerisk empiri vektlegges, var det naturlig å bruke matematiske metoder for å analysere empirien. Den matematiske metoden som er mest brukt, er statistisk analyse (Muijs, 2011, s. 2). Analysen gjøres ved bruk av statistikkprogrammet SPSS, hvor dataen legges inn og gir statistikker. Man kan bruke programmet til å gjøre store utregninger og gjøre omfattende analyser. Det er likevel forskeren som avgjør hvilke statiske operasjoner som skal gjennomføres (Befring, 2015, s. 132). Dette gjelder blant annet faktoranalyse, korrelasjonsanalyse, standardavvik og standardfeil. Standardavviket sier noe om spredningen, og viser til hvor langt de enkelte verdiene i gjennomsnitt ligger fra gjennomsnittsverdien (Kleven & Hjardemaal, 2018; Kristensen & Aanesen, 2019). Statistikk gjør det også mulig å se på sammenhenger; korrelasjoner mellom utvalgt data, og om der er noe signifikans (Kleven & Hjardemaal, 2018). Korrelasjon betyr samvariasjon mellom variabler (Befring, 2015, s. 139). Her brukes Pearsons korrelasjon, som er den mest benyttede korrelasjonskoeffisenten i pedagogisk forskning (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 72). En perfekt korrelasjon har en verdi på enten -1 eller 1. Kleven og Hjardemaal (2018, s. 74) sier at en sterk korrelasjon gjør det lettere å kunne gjøre en prediksjon. En korrelasjonsverdi kan betegnes som svak, moderat eller sterk (Svartdal, 2019). T-test er en signifikanstest man kan bruke for å se om gjennomsnittsverdien i datamaterialet er signifikant forskjellig fra en nullhypotese. Ettersom utvalget i studien er lite, forutsetter t-testen at populasjonene er normalfordelt og da med samme varians. Signifikanstesting tar gjerne utgangspunkt i tilfeldige utvalg. Da utvalget i denne studien ikke er tilfeldig, vil tolkingen av resultatene være viktig for om testingen har vært meningsfull (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 86). Man kan bruke en hypotetisk populasjon for å signifikansteste endringene, dersom man mener at forskjellene bør vektlegges (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 87) Jeg valgte å bruke en «One-sample t-test», som da tester om gjennomsnittet av en kvantitativ variabel er lik en antatt populasjon (Geert van den Berg, u.å.).

For å se på sammenhenger mellom oppgaver, så kan man utføre en faktoranalyse som er en analysemetode innenfor statistikk. Her vil man undersøke sammenhengene mellom variablene i en test. Her kan det da være flere underliggende faktorer som man ikke kjenner til, men som kan være med å beskrive resultatene i en test (Pallant, 2020). Man vil gjerne se etter faktorer som da beveger seg i samme retning. De med samme retning vil gjerne representere ulike aspekt ved samme fenomen, men forklares da av en faktor (Friborg, 2011). Første kolonne i faktoranalysen kan defineres som første faktor. Der finner du de oppgavene som har sterkest innbyrdes korrelasjon (Befring, 2015, s. 147). På den måten kan man se om de ulike oppgavene måler det de skal og om det da er sammenheng mellom oppgavene i oppgavesettet.

3.1.6 Utvalg for oppgavesettet

I den nye læreplanen Fagfornyinga (Utdanningsdirektoratet, 2020), er brøk et gjennomgående tema på 5.trinn. Det var derfor relevant å legge studien til dette trinnet. Utvalget består av både små og store skoler fra urbane og rurale områder i Møre og Romsdal, med fokus på 5.trinn. Her var utfordringen å få med nok skoler til å få et godt representativt utvalg. I kvantitative undersøkelser vil størrelsen på utvalget være sentralt for reliabilitet og validitet (Cohen et al., 2018, s. 203). Jo større utvalg, desto større sjans for at det er representativt (Befring, 2015, s. 127). I arbeidet med å finne skoler som ville delta, tok jeg da kontakt med skoler i hele fylket. Dette forgikk på telefon med rektor og e-post. Da det var mange som ble kontaktet, endte utvalget med å bli et tilgjengelighetsutvalg. Det vil si at de som kunne og ville delta, deltok. I studien deltok fire skoler, og totalt 91 elever (tabell 2). Antall elever kan ikke sies å være representativt for alle femteklassingene i Møre og

Romsdal. Dette gjør det vanskelig å generalisere noe. Statistisk generalisering er avhengig av et matematisk tilfeldig utvalg (Kleven & Hjardemaal, 2018). Utvalget gjør det likevel mulig å se på mulige sammenhenger. Ved å ta utgangspunkt i en hypotetisk populasjon, som nevnt i forrige delkapittel, kan man gjøre analyser og svare på forskningsspørsmålene.

Tabell 2.

Oversikt over utval

Skole	Størrelse	Område
1	Stor	Urbant
2	Liten	Urbant
3	Liten	Ruralt
4	Liten	Ruralt

3.2 Kvalitativ

Som tidligere nevnt, så vektlegges det kvantitative i studien. Likevel valgte jeg å bruke kvalitativt forskningsintervju for å støtte opp om den kvantitative dataen. Kvalitative metoder kan brukes for å utdype funn fra en kvantitativ undersøkelse, og da gi en nyansert innsikt i deltakernes oppfatning og forståelse (Befring, 2015, s. 41). Det er altså en god metode for å gå dybden på et fenomen. Dette var et bevisst valg, da jeg så verdien av elevenes egne ord og tanker. Ved å ta i bruk intervju kunne jeg både få frem elevenes egne oppfatninger og hvordan de forstår brøk.

3.2.1 Intervju som metode

Kvalitative forskningsintervju kan defineres som en samtale med en hensikt og struktur (Kvale & Brinkmann, 2015). Det er viktig å frem at dette ikke er en samtale mellom to likeverdige parter, men en situasjon hvor den som intervjuer har kontrollen. Det er forskeren som introduserer temaet for intervjuet, og det er forskerens ansvar å følge opp de svarene som deltakeren kommer med (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 22). Videre sier Kvale og Brinkmann (2015, s. 22) at et intervju er et sted hvor kunnskap konstrueres mellom de som deltar og deres utveksling av synspunkt. Hva som blir sagt, og hvilken mening som ligger bak, må tolkes av den som intervjuer.

Intervjuformen jeg valgte å bruke, er det Kvale & Brinkmann (2015) omtaler som semistrukturert intervju. Et semistrukturert intervju tar utgangspunkt i noen forhåndsbestemte spørsmål, men åpner også for oppfølgingsspørsmål og en mer åpen samtale. I forkant av intervjuene utformet jeg en intervjuguide (Se vedlegg 4). Her tok jeg utgangspunkt i intervjuguiden fra den masteroppgaven (Vinje, 2019) som inspirerte til oppgavesettet. Her vurderte jeg de spørsmålene som ble brukt, og hvilke spørsmål jeg kunne bruke. Her ble også spørsmål fra tidligere feltarbeid inkludert. Dette var spørsmål som ble utarbeidet fra McIntosh (2007) sin mal for gjennomføring av elevintervju. Jeg tok et bevisst valg om å inkludere alle de fem misoppfatningene i intervjuene. Da intervjuet skulle være en støtte for det kvantitative, var det viktig å ha kvalitativ data som kunne knyttes til de ulike misoppfatningene. Til hver av misoppfatningene hadde jeg valgt ut en mulig oppgave fra oppgavesettet, og hadde formulert tre mulige spørsmål jeg kunne stille. Dette skulle da være utgangspunktet for samtalene, men hvilke spørsmål som ble stilt var avhengig av elevenes svar på oppgavesettet. Det var derfor viktig å ha noe å gå ut fra, men likevel ha mulighet til å stille andre spørsmål enn de i intervjuguiden. Det åpnet for å se på andre oppgaver som eleven hadde svart på.

Hensikten med å ha intervjuene, var å gå dypere og få et bredere blikk på elevenes forståelse av brøk. Intervjuene blir deskriptive, da jeg som intervjuer ønsker at elevene skal beskrive hvorfor de svarer som de gjør i oppgavene (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 47). Ved at elevene får vise frem og forklare, gir det mulighet for å få en bedre forståelse av hva som skjer i elevenes hode når de løser oppgaver (McIntosh, 2007). Oppgavene som brukes under intervjuet er kategorisert ut fra de ulike misoppfatningene, men det er elevenes tolking av oppgavene og hvordan de løser dem som er det interessante her.

3.2.2 Pilotering intervju

Ved pilotering av intervjuet, testet jeg ut spørsmålene i intervjuguiden. Denne piloteringen ble utført med de elevene som deltok i piloteringen av oppgavesettet. Det var også en måte å kunne vurdere meg selv i intervjusituasjonen, og hvordan jeg fremstod. Det kom tydelig frem av piloteringen at enkelte oppfølgingsspørsmål ble veldig ledende, og at jeg som forsker hadde veldig bekreftende respons på svarene til elevene. Dette var noe jeg måtte være bevisst på i forbindelse med intervjuene jeg skulle ha senere. Jeg valgte derfor å skrive ned viktige punkt, og hadde dette tilgjengelig under intervjuene.

3.2.3 Teoretisk analyse

Intervjuene ble transkribert fortløpende. Dette kan sees som en første analyseprosess (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 206). Transkripsjonene ble deretter analysert med utgangspunkt i elevenes forståelse av brøk. Dette blir en form for teoretisk analyse (Kvale & Brinkmann, 2015), hvor utsagn fra elevene vil kobles opp mot definisjonene som ligger til grunn for misoppfatningene i denne studien.

3.2.4 Utvalg intervju

Intervjuene var rettet mot elevene i tilgjengelighetsutvalget som deltok i den kvantitative delen. Av det utvalget hadde jeg bestemt at fire elever skulle intervjues. Etter gjennomføringen av de første intervjuene ble det tydelig at det ville være behov for flere intervju. Dette var på bakgrunn av at intervjuene ble gjennomført uken etter at elevene hadde gjennomført oppgavesettet. Dette gjorde det utfordrende for elevene å gjenhuske hva de hadde gjort. Derfor ble totalt ni elever intervjuet. I forkant av intervjuene ble elevsvarene på oppgavesettet gjennomgått. Elevene ble valgt ut på bakgrunn av svarene på oppgavesettet. Elever som viste tegn på to eller flere misoppfatninger, ville være aktuelle for intervju. Dette krevde at lærerne i de utvalgte klassene hadde et system for å kunne gjenkjenne elevenes besvarelser uten at personlige opplysninger som navn ble gitt til meg. Dette skjedde ved at hver elev hadde en kode på sin besvarelse, og at læreren for den enkelte klassen hadde et skjema med kode og navn.

3.2.5 Intervjuenes validitet og reliabilitet

Intervjuene i seg selv kan vurderes ut fra kvalitet. Intervjuets kvalitet er avhengig av formålet og innholdet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 191). Formålet og hensikten med intervjuene i denne studien, var å få en dypere forståelse for hva og hvordan elevene tenker når de jobber med brøk. Spørsmålene i intervjuguiden var utarbeidet for å få frem hva elevene tenkte, og hvordan de forstod ulike sider av brøkaspektet. Kvaliteten på intervjuet er også avgjørende for kvaliteten på selve analysen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 193). Kvale og Brinkmann viser til seks kvalitetskriterier (figur 14). De mener at det er de tre siste punktene som er viktigst. Da det var femteklassinger som skulle intervjues, var det viktig å legge til rette for gode spørsmål, men også spørsmål som var lette å forstå. Dette var også viktig i oppfølgingsspørsmålene. Lange spørsmål ble også utfordrende for elevene, så i noen tilfeller måtte spørsmålene omformuleres. Dette ble viktig for at elevene skulle få frem hvordan de tenkte, men også for at jeg som forsker skulle få bekreftet hvordan de forstod oppgavene.

Figur 14.

Kvalitetskriterier for et intervju

Boks 9.1 Kvalitetskriterier for et intervju

- I hvilken grad fås spontane, innholdsrike, spesifikke og relevante svar fra intervjupersonen?
- Jo kortere intervjuerens spørsmål er og jo lengre intervjupersonens svar er, desto bedre.
- I hvilken grad følges spørsmålene opp fra intervjuerens side, og hvordan klargjøres betydningen av de relevante delene av svaret?
- Idealintervjuet blir i stor grad tolket mens det pågår.
- Intervjueren forsøker i løpet av intervjuet å verifisere sine fortolkninger av intervjupersonens svar.
- Intervjuet er «selvkommuniserende» - det er i seg selv en fortelling som ikke krever særlig ekstra kommentarer og forklaringer.

Note: Kriterier er hentet fra Kvale & Brinkmann, 2015, s. 194.

Intervjukvaliteten er også avhengig av den som intervjuer. Man må ha kunnskap om emnet, være klar og tydelig, være vennlig og åpen, og samtidig være kritisk, styrende og tolkende (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 196). Da dette var barn, var det viktig å skape en trygg intervjusituasjon. Det var viktig å være åpen for alt elevene sa, slik at de følte at de ble både sett og hørt. Det la grunnlaget for en god matematisk samtale, hvor elevene fikk snakke og forklare hvordan de tenkte.

Når man skal vurdere et resultat fra en intervjusituasjon, vil spørsmålet om ledende spørsmål være relevant. Dersom et spørsmål har ledende formulering, kan det påvirke svaret. Ledende spørsmål kan også brukes for å vurdere intervjusvarene og reliabiliteten ved dem. I det tilfellet kan det også styrke intervjuenes reliabilitet (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 201). Under transkriberingen kom det frem at enkelte spørsmål var ledende. Likevel var de fleste spørsmålene en form for oppfølging for å vurdere elevenes svar.

Transkripsjonen av intervjuene kan også vurderes ut fra reliabilitet og validitet. Det er viktig å vurdere påliteligheten til selve transkripsjonen også. Dersom to personer hadde transkriberte de samme lydfilene, så kunne man sammenlignet og sett om man hadde fått frem de samme svarene og spørsmålene (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 211). Det var derfor viktig å være nøye, og lytte til lydfilene flere ganger for å sikre at det som ble sagt kom frem. Når det gjelder validitet av transkripsjonene, er det vanskelig å si hva som er riktig. Det man må vurdere, er hva transkriberingen skal brukes til. Om det er språket som skal studeres, bør kanskje transkripsjonen være ordrett (Kvale & Brinkmann, 2015). I dette tilfellet er det snakk om å få frem elevenes tanker og se det opp mot teori. Så her ble det viktig å få frem sammenheng i transkripsjonen.

3.3 Innsamlingsprosessen

3.3.1 Den kvantitative datainnsamlingen

Før datainnsamlingen, var det gjennomført samtaler med rektor, og deretter gjort avtaler med de respektive lærerne. Selve datainnsamlingen foregikk i perioden januar-mars, 2022. Under gjennomføringen, var jeg til stede på alle skolene. Alle klassene som deltok, gjennomførte det samme oppgavesettet. Det var satt av en skoletime til gjennomføring, men det var ulikt hvor lang en skoletime var hos de respektive skolene. Det vil si at elevene hadde mellom 45 og 60 minutter på å gjennomføre oppgavesettet. Dette var ikke gunstig, og det måtte gjøres noen vurderinger. De som var raskest, var ferdig med oppgavesettet i løpet av 15-20 minutter. De aller fleste elevene klarte å fullføre oppgavesettet innen skoletimen var omme. Dette gjaldt for alle skolene. Om det var noen som ikke var helt ferdig, fikk de likevel muligheten til å fullføre. Dette gjaldt bare én av skolene, og da en av de som hadde skoletime på 45 minutter. Dette var et bevisst valg, da alle elevene skulle få lik mulighet til å gjennomføre.

I forkant av hver innsamling, startet jeg med å informere elevene. Elevene hadde fått med seg informasjonsskriv og samtykkeskjema hjem noen uker tidligere. Lærerne hadde også informert elevene muntlig, men det var viktig for meg å snakke med elevene selv. Dette var for å være sikker på at de hadde fått den informasjonen de trengte i forkant av gjennomføringen. Før elevene fikk gjennomføre oppgavesettet, startet jeg med å informere elevene om studien og hvor jeg kom fra. Jeg gjorde det tydelig for elevene at dette ikke var en prøve hvor de ble vurdert, men at det handlet om å ville forstå hvordan de tenkte og hvordan de forstod brøk. Det var viktig at de forstod at deltakelse var frivillig, og at de hadde mulighet til å trekke seg når som helst. Her ble også anonymitet forklart. Elevene fikk beskjed om å lese oppgaveteksten nøye, ta seg god tid, og svare så godt de kunne. Det var viktig for meg at de forstod at de skulle gjøre så godt de kunne, og at det var viktig at de prøvde å svare på alle spørsmålene. Dette var for å få et fullstendig datamateriale, som da la grunnlaget for analysene. Når jeg skulle legge inn dataen til analyse, var det få ubesvarte oppgaver.

En av grunnene til at jeg ville være til stede under selve innsamlingen, var at jeg ville være der dersom elevene hadde spørsmål. Jeg gikk derfor rundt i klasserommet og svarte på spørsmål rundt formuleringen av oppgavene dersom de ikke forstod. Det var viktig å omformulere slik at de forstod spørsmålet, men likevel ikke gi noe informasjon som var til hjelp. Dette var for å unngå at datamaterialet ble påvirket på en uheldig måte. Når det er sagt, var det få elever som spurte om noe. Det som gikk igjen, var at de ikke forstod hva de skulle gjøre i oppgave 14 hvor de skulle skrive $\frac{2}{3}$ som desimaltall. Det skal sies at klassene som deltok hadde hatt liten eller ingen undervisning som tok for seg forholdet mellom brøk og desimaltall. Dette kommer jeg tilbake til i kapittelet 4.

3.3.2 Den kvalitative datainnsamlingen

I samtykkeskjemaet som var sendt ut i forkant av datainnsamlingen, var det informert om at elever kunne bli trukket ut til intervju. Det var derfor lagt inn at foreldrene/foresatte måtte krysse av for om deres barn skulle delta på intervju. Elevene ble valgt ut på bakgrunn av svarene på oppgavesettet. Elever som viste tegn på to eller flere misoppfatninger, ville være aktuelle for intervju. Dette krevde at lærerne i de utvalgte klassene hadde et system for å kunne gjenkjenne elevenes besvarelser uten at personlige opplysninger som navn blir gitt til meg. Dette skjedde ved at hver elev hadde en kode på sin besvarelse, og at læreren for den enkelte klassen hadde et skjema med kode og navn. Etter å ha gjennomgått besvarelsene fra oppgavesettet, fikk læreren en oversikt over de elevene som var aktuelle for intervju, og så ga de beskjed om hvem som skulle gå ut basert på samtykke.

På alle skolene utenom den første skolen, ble intervjuene gjennomført i skoletimen etter de hadde gjennomført oppgavesettet. Jeg la inn svarene fra oppgavesettet i et skjema, hvor jeg fikk oversikt på resultatene. De elevene som hadde tegn på misoppfatninger, fikk da spørsmål om de ville delta på en liten samtale. På den første skolen hadde jeg tre ulike klasser i løpet av de tre første skoletimene. Da datamaterialet var stort, ble det utfordrende å få en rask oversikt på hvem som var aktuelle for intervju. I tillegg hadde elevene en kort skoledag, og det ble derfor avtalt å ta igjen intervjuene uken etter. Under intervjuene kom det frem at elevene hadde utfordringer med å huske hva de hadde tenkt under gjennomføringen av oppgavesettet. På bakgrunn av det, valgte jeg å gjennomføre de resterende intervjuene samme dag som elevene gjennomførte oppgavesettet.

Fra skolene som deltok, hadde jeg inne ni elever til intervju. Dette var elever fra tre ulike skoler, og var fem jenter og fire gutter. Alle elevene fikk litt informasjon rundt formålet med samtalen (se intervjuguide), og ble gjort oppmerksom på at det var frivillig. Intervjuene foregikk i et ledig klasserom eller grupperom, og intervjuene ble tatt opp via diktafon. Ved å bruke diktafonen, kunne jeg fokusere på eleven og de svarene jeg fikk. Det ga også mulighet til å kunne diskutere sammen. I gjennomgangen av de utvalgte oppgavene, var det enkelte elever som havnet i en kognitiv konflikt. De oppdaget selv at de hadde gjort feil, og endret svarene sine. Da jeg gikk gjennom flere misoppfatninger med hver elev, ble det likevel informative intervju til tross for de kognitive konfliktene.

3.4 Analysering og behandling av datamaterialet

Som følge av datainnsamlingen, resulterte det i 91 besvarte oppgavesett, og lydfiler med intervju av ni elever. Denne delen av kapittelet tar for seg hvordan dataen fra de ulike innsamlingsmetodene ble bearbeidet og analysert.

3.4.1 Analysering og behandling av det kvantitative datamaterialet

Grunnlaget for de kvantitative dataene er elevenes besvarelser av oppgavesettet. Som tidligere nevnt, ble hvert enkelt oppgavesett nummerert med en kode. Dette gjorde at jeg ikke hadde kjennskap til hvem de ulike kodene tilhørte, og det da la til rette for en mer objektiv analyse. Under innsamlingsperioden, ble hver besvarelse lagt inn i en Excel-fil. Besvarelsene ble deretter lagt inn i en fil som var opprettet i SPSS. Som nevnt i teorien, må elevenes forståelse omgjøres til numerisk data. Det blir gjort i prosessen med å legge inn besvarelsene, som så kunne analyseres i etterkant. Besvarelsene ble lagt inn ut fra variabler som var laget på forhånd. Variablene tok for seg følgende: elev-id, skole-id, kjønn, og alle oppgavene med svaralternativ og poeng (riktig/galt). Det ble gitt 0 eller 1 poeng på de aller fleste oppgavene. I to av oppgavene fikk elevene 0,5 poeng for ett riktig svar, og 1 poeng om de hadde begge alternativene riktig. Ved utarbeiding av variablene i SPSS-filen, ble det utarbeidet et kodeskjema (se vedlegg 2). Her ble det også et spørsmål om hvordan svaralternativene til variablene skulle vurderes.

Til å begynne med ble variablene lagt inn med riktig eller feil svar, hvor feil svar viste til misoppfatningen. Det var også ett ekstra svaralternativ som viste til om elevene hadde valgt et annet svar. Dette viste seg å bli utfordrende å jobbe med når dataen skulle analyseres. På bakgrunn av det ble det ekstra svaralternativet fjernet, og en ny SPSS-fil ble opprettet. Den filen hadde kun rett eller galt svar med poengsum. Dette gjorde vanskeligere å vurdere elevenes feilsvar. Derfor ble den andre SPSS-filen kombinert med den originale Excel-filen. Den filen inneholdt nøyaktig oversikt på elevenes besvarelser og hvilke svaralternativ de hadde valgt. Dette gjorde det også mulig å filtrere ut spesifikke svar, som igjen ble nyttig for analysearbeidet.

Med datafilene som fundament, gjorde jeg ulike analyser for å svare på forskningsspørsmålene. Analysene og resultatene blir utdypet i kapittel 4.

3.4.2 Analysering og behandling av det kvalitative datamaterialet

Det kvalitative datamaterialet tar utgangspunkt i lydfiler fra ni elevintervju. Her ble alle lydfilene transkribert. Når man transkriberer en muntlig samtale til en skriftlig form, omstrukturerer man teksten slik at den er passende for videre analyse. Dette kan sees på som første del av analyseprosessen (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 206). Under transkriberingen av lydfilene, valgte jeg å skrive om fra dialekt til bokmål. Dette var for å få frem det som ble sagt, samtidig som at teksten skulle fremstå ryddig. Her var det elevenes forklaringer som var viktig.

For det videre arbeidet, ble de transkriberte intervjuene analysert opp mot teori. Her valgte jeg å bruke en teoretisk analyse. Dette er en mer generell tilnærming til intervjuanalyse, hvor intervjutekstene leses og tolkes ut fra teori (Kvale & Brinkmann, 2015, s. 263). Det blir med andre ord ikke brukt noen spesifikke teknikker eller metoder, og analysen hviler på teoretisk refleksjon. Her var det viktig å få frem elevenes oppfatninger av brøk, og koble opp deres utsagn mot teorien. Analysen tok utgangspunkt i ni elevintervju. Hvert intervju tok utgangspunkt i de samme intervjuspørsmålene, men i flere av intervjuene ble det inkludert andre oppgaver basert på besvarelsene. Alle intervjuene startet med et spørsmål om begrepet brøk og hva elevene knyttet til det. Det var for å få en rolig start, og for å sette i gang tankene. Analysen ser på spørsmålene knyttet til oppgavene og misoppfatningene, og de svarene som elevene kom med.

3.5 Etiske vurderinger

Med tanke på innsamling av empiri, har jeg som forsker et ansvar for å informere alle deltakere, foreldre/foresatte, lærere og skoleledere om hva prosjektet går ut på og målet for prosjektet (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 28–29; NESH, 2021). Prosjektet fikk navnet «Elevers forståelse av brøk». Da begrepet «misoppfatninger» kan oppfattes som negativt, valgte jeg å heller bruke begrepet «forståelse». Dette var for å trygge både foreldre/foresatte og elever. Begrepet «misoppfatninger» kunne også tydeliggjøre hvilke elever som hadde misoppfatninger i en intervjusituasjon. Dette kunne skape ubehag for de elevene i klassemiljøet. Det var derfor et bevisst valg å endre prosjektnavnet. Informasjonen ble sendt ut sammen med et samtykkeskjema. Skjemaet (se vedlegg 5) inneholdt informasjon om selve prosjektet, og hva deltakelsen innebar for deres barn. Her kunne de foresatte/foreldrene samtykke til om barnet deres skulle delta på testen, og om de ønsket å delta på intervju. Dette gjelder for alle barn under 15 år (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 29). Svaret ble gitt på papir, og levert til faglærer/kontaktlærer. Dette var samlet inn i forkant av gjennomføringen. Som beskrevet tidligere i oppgaven, så fikk alle elevene muntlig informasjon før gjennomføringen i klasserommet og før intervjuene. Det var viktig at de forstod at det var frivillig (NESH, 2021).

I tillegg til informasjonsansvar og samtykke, er det flere forskningsetiske retningslinjer som alle forskere må forholde seg til (NESH, 2021). Dette gjelder særlig personvern knyttet til konfidensialitet og anonymitet i forskning. I dette forskningsprosjektet, ville lydfilene fra intervjuene kunne kobles til enkeltpersoner. I slike tilfeller må man sende søknad om godkjennelse til Norsk senter for forskningsdata (NSD)[7]. Det ble derfor søkt til NSD om godkjenning, og datainnsamlingen ble ikke gjennomført før godkjenningen var mottatt (se vedlegg 6).

[7] Hjemmeside: https://nsd.no/

Rett før datainnsamlingen, ble hvert oppgavesett nummerert. Hver besvarelse hadde både elev-id og skole-id. Elevens ID-nummer ble koblet til elevens navn, men dette var det kun faglærer/kontaktlærer som hadde tilgang på. Jeg fikk ikke noen navn, og forholdt meg kun til ID-nummeret som ble tildelt de ulike besvarelsene. På bakgrunn av det vil det ikke være mulig å koble besvarelsene til enkeltelever. Når det gjelder kravet om konfidensialitet, har jeg oppbevart besvarelser og analyser på separate plasser. Det er strenge krav til lagring av informasjon (Kleven & Hjardemaal, 2018, s. 29). Filene har blitt lagret på studentkonto i OneDrive, og er godkjent av HVO ved bruk av to-faktor autentisering (MFA). Intervjuene ble tatt opp med appen Nettskjema-diktafon, og ble direkte overført til den sikre siden Nettskjema (UiO, 2017). Dette er et sikret lagringssted, hvor man kan lytte til filene på nytt og få transkribert dem. Lydfilene ble slettet etter de var transkribert. All empiri i studien er anonymisert, og i tråd med retningslinjene fra NSD og NESH.

4 Resultat og analyse

I dette kapittelet legger jeg frem resultat, samt analysen av det kvantitative datamaterialet. Her starter jeg med en overordnet analyse, før jeg ser nærmere på forskningsspørsmålene i oppgaven.

Med utgangspunkt i de fem misoppfatningene fra teoridelen, vil jeg se på elevenes resultat og svar på de enkelte oppgavene. Analysene vil gi et «bilde» på utbredelsen av misoppfatninger blant elevene i utvalget. Her blir det også analysert sammenhengen mellom de ulike oppgavene under hver misoppfatning. At det er en korrelasjon mellom oppgavene, er viktig. Her er faktoranalysen relevant. Dette er for å se om oppgavene måler det de skal, og fordi misoppfatninger fører til en bestemt feiltenkning; en konsekvent idé (Brekke, 2002). Ved en bestemt feiltenkning vil elevene gjøre systematiske og repeterende feil.

4.1 Overordnet analyse

I denne delen vil jeg gi en overordnet analyse av oppgavesettet og hvordan elevene presterte. Her vil jeg se nærmer på oppgavesettets reliabilitet og oppgavenes vanskegrad.

Det var samlet inn besvarelser fra 91 elever på 5. trinn. Samlet sett var det 111 elever i de klassene som deltok. Av de 91 elevene var det 85 elever med gyldige resultat som kunne analyseres. Dette vil si at det var 85 elever som hadde svart på alle oppgavene. Det var 20 oppgaver i oppgavesettet, hvor hver oppgave ga maksimalt 1 poeng. Unntaket er oppgave 13 og 20, hvor det er delt opp som to ulike variabler med mulighet for ett poeng på hver. Dette er fordi svaralternativene måler ulike misoppfatninger innenfor samme oppgave. Det vil si at elevene kan få maksimalt 22 poeng. Med utgangspunkt i resultatene fra tabell 3, kan man se elevenes prestasjoner. Resultatet viser fra en minimumsskåre på 3 til en maksimumskåre på 21,5 poeng. Det er en gjennomsnittlig skåre på 11,98 poeng. Standardavviket forteller oss at det er en spredning på 4,59 i gjennomsnitt fra gjennomsnittsverdien. Elevenes prestasjoner i prosent (p) står i parentes.

Tabell 3.

Resultat fra oppgavesett med gjennomsnitt og standardavvik.

	N	Minimum (p)	Maximum (p)	Gjennomsnitt (p)	Standardavvik (p)
Sumskåre	85	3,00 (13,64)	21,50 (97,73)	11,98 (54,44)	4,59 (20,86)
Valid N	85				

Når man bruker tester i forskningsprosjekt, kreves det at reliabiliteten knytt til testen er akseptabel. Reliabiliteten handler om hvor nøyaktig og troverdig resultatene er. Her utførte jeg en reliabilitetsanalyse på oppgavesettet som helhet, og da ble Cronbach's Alpha lik 0,861. Cronbach's Alpha er ifølge teorien et mål på den indre konsistensen. Reliabilitets-koeffisientens verdi kan tolkes som 86,1% samvariasjon mellom resultat ved flere gjennomføringer. Som nevnt tidligere vil en reliabilitetskoeffisient med verdi over 0,8 har en god reliabilitet. Her ble det også vurdert om noen av oppgavene ville påvirke verdien dersom de ble fjernet. Tallene var helt marginale, og ville hatt liten påvirkning. I tabell 4 ser vi resultatene fra en t-test, hvor standardfeilen er en indikasjon på at det er 95% sannsynlighet for at gjennomsnittet i en antatt populasjon ligger mellom intervallet 10,99 og 12,97. Da den gjennomsnittlige skåren til elevene var 11,98, kan vi se at den ligger innenfor. Verdiene indikerer god reliabilitet.

Tabell 4.

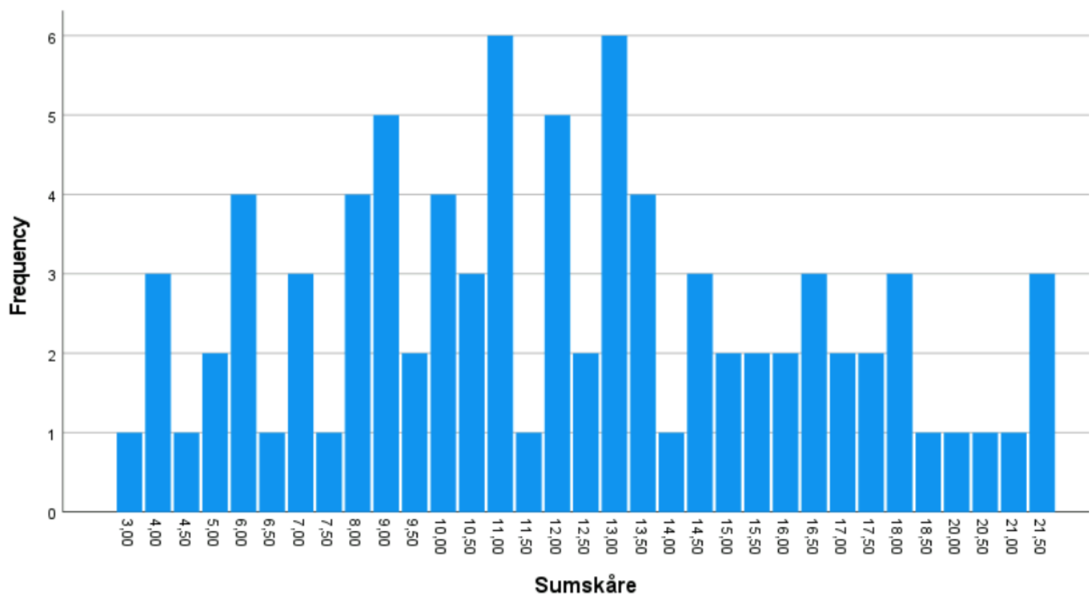
Resultat t-test (One-sample t-test).

			Signifikans			95% konfidens intervall knyttet til forskjellen	
	t	df	Ensidig p	Tosidig p	Gjennomsnitts forskjell	Nedre	Øvre
Sumskåre	24	84	<,001	<,001	11,98	10,99	12,97

Som man kan se av figur 15, så er elevenes sumskår fordelt ganske jevnt utover. Dersom det hadde vært et større utvalg, kunne man hatt en tydeligere normalfordeling på resultatet. I tillegg kunne elevene få 0,5 til 1 poeng på to av oppgavene. Dette gjør at resultatet sprer seg mer. I tillegg til datamaterialets reliabilitet, har jeg også sett på oppgavenes vanskegrad. Dette kan man se ut fra den prosentverdien hver oppgave har. Det vil si antall elever som svarer riktig på oppgaven.

Figur 15.

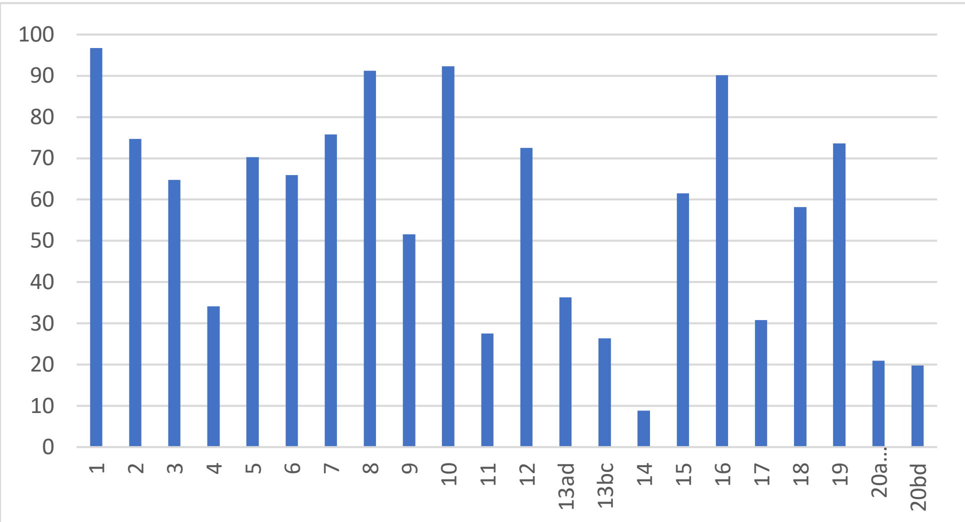
Histogram med oversikt på elevenes sumskår/resultatfordeling.



Som man kan se ut fra figur 16, så har de fleste oppgavene en svarprosent på over 50%. Det vil at 50% av elevene har klart oppgaven. Både oppgave 13 og 20 tar for seg to misoppfatninger. Her ligger svarprosenten på 28% og 38% på oppgave 13, og 20% og 21% på oppgave 20. Den lave svarprosenten kan indikere at oppgavene var vanskelig for elevene. Begge oppgavene tar for seg brøk til desimal. Dette var noe elevene hadde vært litt innom, eller så hadde de ikke hatt om det i det hele tatt. Dette gjelder også oppgave 4 og 14. Oppgave 11 og 17 skiller seg klart ut, og det vil jeg komme tilbake til i delkapittel 4.2.

Figur 16.

Histogram med oversikt over prosent rette svar per oppgave (13 og 20 måler to misoppfatninger).



Jeg har også sett på oppgavenes diskriminering, som ser på korrelasjon mellom elevenes prestasjoner på enkelte oppgaver og totalprestasjonen på oppgavesettet. Som man kan se ut fra tabell 5, så ligger tre oppgaver (11, 12 og 16) under 0,3. Sett ut fra prosentskåren så var det høye prestasjoner på oppgave 12 og 16, og det kan tenkes at disse ikke var kognitivt utfordrende. Oppgave 11 har lav svarprosent, og kan indikere at oppgaven var vanskelig. Det kan også være andre faktorer som påvirker svarprosenten. Det kommer jeg tilbake til i delkapittel 4.2. Oppgave 1 ligger på grensen, og kan vurderes til å være lite kognitivt utfordrende. De resterende oppgavene har gode verdier, som gjør oppgavene egnet til å skille mellom faglig svake og faglig sterke elever.

Tabell 5.

Oppgavenes diskriminering uttrykt ved point-biserial korrelasjon

	Diskriminering	(Point-biserial korrelasjon)			
Oppgave	**Pearson**	**Signifikans p**	**Oppgave**	**Pearson**	**Signifikans p**
1	,327**	,002	**12**	,282**	,009
2	,574**	<,001	**13ad**	,333**	<,001
3	,575**	<,001	**13bc**	,671**	<,001
4	,673**	<,001	**14**	,523**	<,001
5	,503**	<,001	**15**	,661**	<,001
6	,590**	<,001	**16**	,200*	,066
7	,559**	<,001	**17**	,499**	<,001
8	,458**	<,001	**18**	,423**	<,001
9	,632**	<,001	**19**	,697**	<,001
10	,439**	<,001	**20abc**	,616**	<,001
11	,244**	,025	**20bd**	,669**	<,001

4.2 Misoppfatningene og oppgavene knyttet til dem

For å få en bedre oversikt på hvilke oppgaver som hadde de beste egenskapene til å kunne avdekke misoppfatningene, utførte jeg en faktoranalyse i programmet SPSS. Jeg valgte å utføre en KMO og Bartletts test for å se om datamaterialet var egnet for faktoranalyse. Som tallene viser i tabell 6, så indikerer det at de er egnet. På samme måte som Cronbach's Alpha, så vil en høy verdi være positiv.

Tabell 6.

Test før faktoranalyse.

Kaiser- Meyer-Olkin (mål for tilstrekkelig prøvetaking)		,765
Bartletts test av sfærisitet	Approx. Chi-square	766,488
	df.	231
	Sig.	<,001

Jeg kunne dermed utføre en faktoranalyse (tabell 7). Faktoranalysen påviste i første omgang i hvilken grad variansen til de ulike variablene som analyseres kan forklares ved hjelp av ikke-observerte faktorer. Her var det ingen av oppgavene som skilte seg ut, og det viste en

Tabell 7.

Faktoranalyse av oppgavene i SPSS

	Komponent		
Oppgave /Faktor	**1**	**2**	**3**
Oppgave 10	,752		
Oppgave 1	,725		
Oppgave 8	,659		
Oppgave 5	,650		
Oppgave 6	,570		
Oppgave 7	,557		
Oppgave 2	,443		
Oppgave 11	-,421	,359	,312
Oppgave 20 b og d		,898	
Oppgave 20 a, b, c		,882	
Oppgave 13 b og c		,686	
Oppgave 14		,663	
Oppgave 4		,621	
Oppgave 13 a og d		,585	-,461
Oppgave 17		,527	
Oppgave 15	,357	,432	
Oppgave 9		,364	,358
Oppgave 16			,653
Oppgave 3			,632
Oppgave 19	,428		,520
Oppgave 18			,486
Oppgave 12			,303

Note: Utvinningsmetode - Hovedkomponentanalyse; Rotasjons metode - Oblimin med Kaiser normalisering. Rotasjon konvergert i 18 iterasjoner.

sammenheng mellom alle oppgavene i oppgavesettet. Jeg valgte å kjøre faktoranalyse med rotasjon. Da konstrueres komposisjoner av variablene, altså grupper av variabler, og dette blir angitt ved hjelp av størrelsen på faktorbelastning hver av variablene har. Hver variabel får da tallstørrelser som angir i hvor stor grad de hører til under de ulike ikke-observerte faktorene. Man får da en sammensetting av oppgaver som programmet mener henger sammen. Den første analysen viste seks faktorer som vise samvariasjon på 63,5%. Ved å se nærmere så jeg at faktor 1, 2 og 3 var de som hadde betydning for videre analyse. De tre første faktorene viser samvariasjon på 47,2 % mellom oppgavene. Den samvariasjonen som ikke er forklart, er variabler man ikke har kontroll på. Dette kan være alt fra forkunnskaper til sosioøkonomiske variabler som spiller inn på elevenes forståelse. Ved å endre faktoranalysen til å vektlegge de tre første faktorene, var det noen av verdiene som hadde endret seg. Dette gjaldt i hvilken grad variansen til de ulike variablene som analyseres kan forklares ved hjelp av ikke-observerte faktorer. Oppgave 12 hadde en lav verdi og det kunne vurderes om det var sammenheng med de andre oppgavene. Dette kommer jeg tilbake til i vurderingen av faktorene.

Resultatet fra faktoranalysen ble så sammenlignet med oppgavevalideringen jeg hadde gjort på forhånd (se vedlegg 3). I en perfekt verden så hadde oppgavene fra hver misoppfatning havnet samlet, slik er det ikke. Her fikk jeg se nærmere på oppgavene mine og om de målte det de skulle. Faktor 1 tok for seg ti oppgaver (1, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 15 og 19). Oppgave 11 skilte seg ut her, og var eneste oppgaven som lå i minus her. Dette var en oppgave som mange elever strevde med (figur 17). Dette kan ha med selve ordleggingen i oppgaveteksten. Oppgaven går under misoppfatningen «Jo større nevner (eller teller), jo større brøk», og skulle måle hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her var det 66 av elevene som svarte feil. Jeg har derfor valgt å se vekk fra den i videre analyse.

Figur 17.

Ser på teller og nevner når de avgjør størrelsen.

Oppgave 11

Hvilken brøk har dobbel så stor verdi som $\frac{1}{3}$?

- ○ $\frac{1}{6}$
- ○ $\frac{2}{3}$
- ○ $\frac{2}{6}$

Oppgave 1 og 8 var definert under misoppfatningen «Jo større nevner (eller teller), jo større brøk», og måler som eleven ser på størrelsen på nevner. Oppgave 2, 6, og 15 var definert under misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Der blir elevene målt på hvor vidt elevene ser på differansen mellom teller og nevner når de skal avgjøre brøkens størrelse. Oppgave 5 og 10 var definert under misoppfatningen «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall». Dette var oppgaver hvor elevene skulle markere en brøk i en mengdemodell og en arealmodell. Ved en slik misoppfatning vil eleven kun se på teller eller nevner isolert, og da markere opp hva det sifferet viser. Oppgave 7 og 19 var definert under misoppfatningen «Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Da flere av misoppfatningene heller mot heltallsforståelse, og det å se brøken som en tallstørrelse i seg selv, var det noe jeg ville ta med videre i analysen.

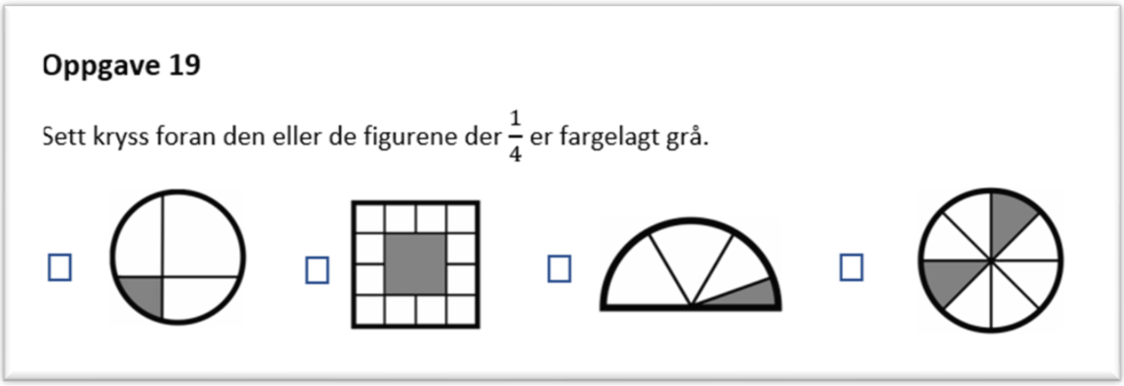
Faktor 2 tok for seg åtte oppgaver (4, 9, 11, 13, 14, 15, 17 og 20). Her finner man alle oppgavene som er knyttet til misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma». Til tross for at oppgavene viser stor sammenheng, velger jeg å ikke se nærmere på disse. Dette er på bakgrunn av at klassene som deltok hadde hatt lite eller ingen undervisning knyttet til temaet. Vi finner også 15 og 17 som går under «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Da de to oppgavene går under samme misoppfatning, vil jeg ta med dem i videre analyse. Dette er knyttet til fellestrekkene.

Faktor 3 ser på seks oppgaver (3, 9, 12, 16, 18, 19.) Her finner vi fire av fem oppgaver (3, 12, 16 og 19) fra misoppfatningen «Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Her blir elevene vurdert på hvor vidt de ser på størrelsen på delene, eller om de bare ser på antall deler (figur 18). Oppgavene omhandler lik deling av delene, og kan også knyttes til tallstørrelse.

Oppgave 12 hadde en lav verdi og det kunne vurderes om det var sammenheng med de andre oppgavene. Denne oppgaven gikk ut på at elevene skulle selv lage en figur. Her var det jeg som vurderte elevenes svar. Dette kan vurderes som en mer subjektiv enn objektiv vurdering av svaret, men vurderingen ble gjort ut fra kriterier til oppgaven. Oppgaven blir derfor tatt med videre i analysen.

Figur 18.

Vurdering av størrelse på deler og likeverdige brøker.



De to andre oppgavene (9 og 18) er henholdsvis koblet til misoppfatningene «brøkstrek er lik desimalkomma» og «Jo større nevner (eller teller), jo større brøk». Det kan diskuteres om de to oppgavene har målt andre aspekt enn den misoppfatningen de var rettet mot. Oppgave 9 blir ikke tatt med i videre analyse på samme grunnlag som oppgavene i faktor 2. I den videre analysen valgte jeg å ta med oppgavene i faktor 1 og faktor 3, men med noen unntak.

I dette delkapittelet har oppgavene i oppgavesettet blitt vurdert opp mot en faktoranalyse. Analysen gir en oversikt over oppgaver som har felles faktor, og som da kan fortolkes til å høre sammen. Som faktor 2 viste, så var oppgavene knytt til misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma» til dels samlet. Det viser at det var en sammenheng mellom oppgavene. På bakgrunn av elevenes undervisning så langt i emnet, ville ikke dataen fra de oppgavene være realistisk å bruke for videre analyse. Derimot vil oppgave 15 og 17, som er knyttet til en annen misoppfatning, bli inkludert i videre arbeid. Analysen har gjort det mulig å trekke ut de oppgavene som er relevante for videre analyse. Her blir oppgavene fra faktor 1 inkludert, med unntak av oppgave 11. Jeg har også valgt å ta med oppgavene i faktor 3, med unntak av oppgave 9, 11 og 13. Dette inkluderer fire av fem misoppfatninger. De fire misoppfatningene kan igjen knyttes til heltallsforståelse og tallstørrelse.

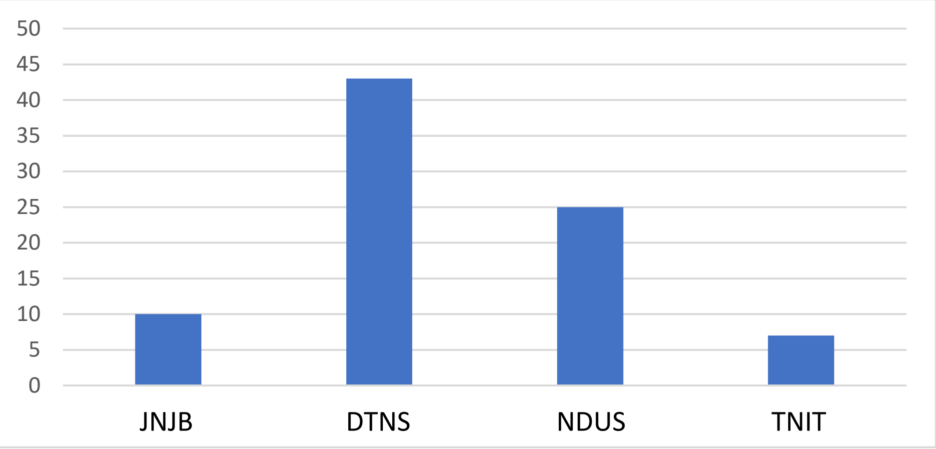
4.3 Utbredelse av misoppfatninger

Denne delen av kapittelet fokuserer på analysen opp mot forskningsspørsmålene. Studien hadde som hensikt å se på utbredelsen og sammenhengen mellom misoppfatninger knyttet til brøk. Det første forskningsspørsmålet ser på *hvilken misoppfatning knyttet til brøk ser man mest av på 5.trinn?* Som nevnt tidligere, vil elever som viser tegn på misoppfatninger være koblet til systematiske og repeterende feil. Det vil si at en elev som viser tegn på en misoppfatning, ofte vil bruke samme strategi og tenkemåte i flere oppgaver. Her har jeg ikke inkludert oppgaven knyttet til misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma». For å kunne svare på forskningsspørsmålet, har jeg funnet besvarelser hvor elevene viser samme feiltenking i oppgaver som er rettet mot samme misoppfatning.

Ser man på de fire misoppfatningene som er tatt med videre i analysen, så har 51 av elevene vist tegn på én eller flere misoppfatninger. Det utgjør 56% av elevene. I tabell 8 ser vi hvor flest elever viser misoppfatning. Her viser det at 43 elever viser tegn på misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Dette utgjør 47,2% av

Tabell 8.

Elever med tegn på misoppfatninger fordelt på misoppfatning.

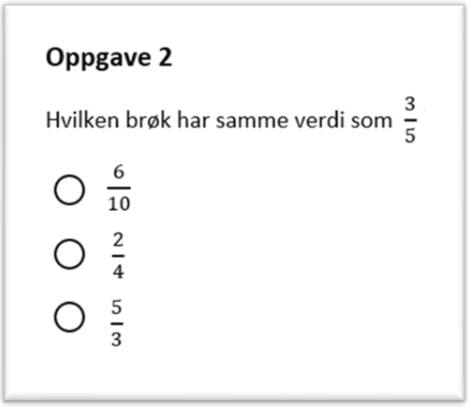


Note: JNJB (jo større nevner (eller teller) jo større brøk), DTNS (differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken), NDUS (nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse), TNIT (teller (nevner) eller prosent er et isolert tall).

utvalget. I denne misoppfatningen blir elevene målt på hvor vidt elevene ser på differansen mellom teller og nevner når de skal avgjøre brøkens størrelse. Et eksempel på dette er oppgave 2 (figur 19).

Figur 19.

Ser om eleven ser på differansen mellom teller og nevner.

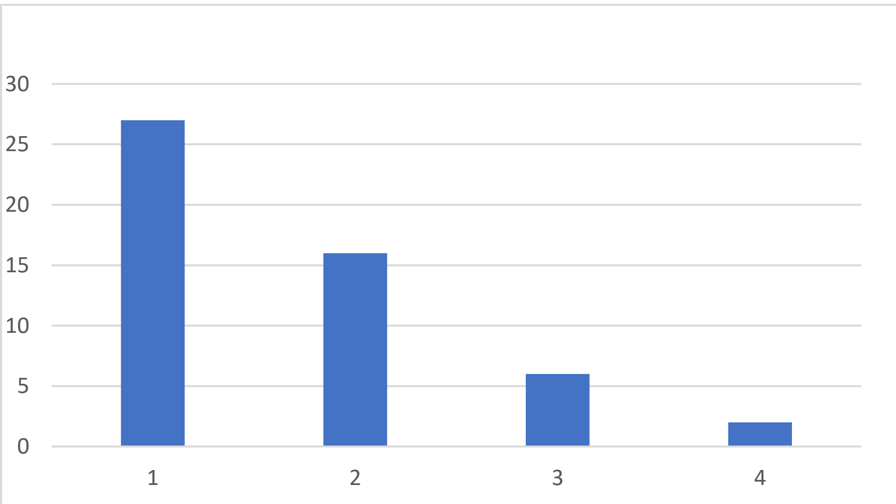


Den misoppfatningen som går igjen minst er «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall» med 7 elever. Ved en slik misoppfatning vil eleven kun se på teller eller nevner isolert, og da markere opp hva det sifferet viser. Det er likevel mange av elevene som viser tegn på flere enn én misoppfatning. Det kan også nevnes at tre av fire misoppfatninger har en utbredelse på mer enn 10% av utvalget, med «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse» på 27,5% og «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» på 11%. Utbredelsen kan også knyttes til heltallsforståelse og tallstørrelse, og er noe jeg kommer tilbake til i kapittel 5 hvor funnene skal drøftes.

Om man ser nærmere på histogrammet i figur 20 er de 56 elevene fordelt utfra antall misoppfatninger de viser tegn på. Flest elever viser tegn på én misoppfatning, mens to elever viser tegn på fire misoppfatninger. Jeg har også valgt å dele opp elevene ut fra nivå. Her tok jeg utgangspunkt i elevenes totale sumskår i prosent på oppgavesettet og frekvens, og så sett på antall riktige svar i prosent på de ulike oppgavene på de ulike nivåene. Da det er 20 oppgaver, har man 22 variabler som måler elevenes forståelse av brøk. På bakgrunn av det og resultatene fra den point-biseriale korrelasjonsanalysen, kan man si noe om nivåprestasjonene hos elevene. Om man hadde hatt tilgang til resultat fra for eksempel nasjonale prøver, kunne man sammenlignet resultatene for å se om det var noe korrelasjon.

Figur 20.

Histogram med oversikt på elever fordelt på antall misoppfatninger de viser tegn på.



Den laveste tredjedelen har jeg valgt å ta fra 48% og nedover da andel elever med lavere enn 30% ikke er representativt knyttet til mestringsnivå. Dette er oppgaver på et lavere nivå (grunnleggende brøkforståelse). Jeg har derfor valgt å legge opp til grupper av lik størrelse. De elevene som er på middels nivå, har en sumskår mellom 48% og 75%. De med høyt nivå ligger fra 75 prosent og opp.

Som man kan se av tabell 9, så er den femte misoppfatningen inkludert. Dette er for å få et oversiktsbilde på hele oppgavesettet. Sett ut fra de tallene så hadde misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma» vært mest utbredt. Ser man på oppgavene (2, 6, 15, 17) knytt til «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken», ser man at det er der flest elever har utfordringer. Det er likevel ganske spredd utover på nivåene, noe som gjenspeiler at mange av elevene viste tegn på mer enn én misoppfatning.

Tabell 9.

Nivådeling ut fra antall riktige svar i prosent.

Nivå/ Oppgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 a og d	13 b og c	14	15	16	17	18	19	20 abc	20b og d
Lavt	0,91	0,5	0,162	0,06	0,49	0,32	0,44	0,76	0,2 1	0,79	0,18	0,56	0,26	0,03	0,00	0,26	0,88	0,12	0,32	0,25	0,03	0,00
Middels	1	0,86	0,419	0,35	0,81	0,84	0,95	1	0,7 0	1	0,27	0,84	0,35	0,19	0,05	0,81	0,92	0,30	0,73	0,649	0,16	0,16
Høyt	1	1	0,571	1	0,93	0,93	1	1	0,9 3	1	0,57	0,93	0,64	1	0,43	1	1	0,79	0,86	0,821	0,86	0,86

Det første forskningsspørsmålet i studien var *hvilken misoppfatning knyttet til brøk ser man mest av på 5.trinn?* På bakgrunn av analysen i dette delkapittelet er det misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» som har størst utbredelse med 47,2% blant elevene i utvalget. Da det er indikasjoner på fellestrekk mellom misoppfatningene, er dette noe som er interessant for videre analyse. Jeg vil derfor se nærmere på de utvalgte misoppfatningene.

4.3.1 Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

Denne misoppfatningene ser på hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren eller telleren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her vil eleven se på verdien av nevneren isolert opp mot hverandre. Her er det oppgave 1, 8 og 18 som blir trukket frem. Til tross for at oppgavene er fra ulike faktorer, så blir de vurdert sammen på bakgrunn av fellestrekkene mellom misoppfatningene. Fellestrekkene som ble dratt frem i forrige delkapittel var heltallsforståelse, og det at elevene ikke ser brøken som en egen tallstørrelse. I disse tre oppgavene er det størrelsen på nevneren som trekkes frem, da brøkene har samme teller (1). Som man kan se av tabell 9 ovenfor, så hadde de fleste elevene riktig på oppgave 1 og 8. I oppgave 18 (figur 21) var det en større andel elever som hadde feil. Her var det kun ti

Figur 21.

Oppgave 18 fra oppgavesettet. Ser på nevner når de avgjør avstand.

Hanna er på fjelltur med far. Hun spør om de har igjen $\frac{1}{4}$ av turen. Far sier de har igjen mindre enn det.

Hvor langt kan de ha igjen av turen?

- ○ $\frac{1}{5}$
- ○ $\frac{1}{3}$
- ○ $\frac{1}{2}$

elever som viste tegn på misoppfatning. Oppgave 18 var representert gjennom en situasjonskontekst, og var på et annet vanskelighetsnivå enn de to andre. I de to første hadde over 90% av elevene riktig, mens i oppgave 18 var det kun 58% som svarte riktig. I oppgave 8 skulle elevene sortere brøkene ut fra verdi. Her hadde en av elevene skrevet ½ som minst og 1/8 som størst. Dette kan være et tegn på misoppfatningen. Under intervju med eleven fikk jeg en bedre forståelse av elevens tankegang, som man ser av utsagnet under.

> *Elev: Her ser du. Om vi først har en todel, så er det halv av hele. Så tar jeg den minste. Da er det åtte deler. Og så er det bare en som er fargelagt. Da ser man at det er den som er størst fordi den har størst del som er fargelagt.*

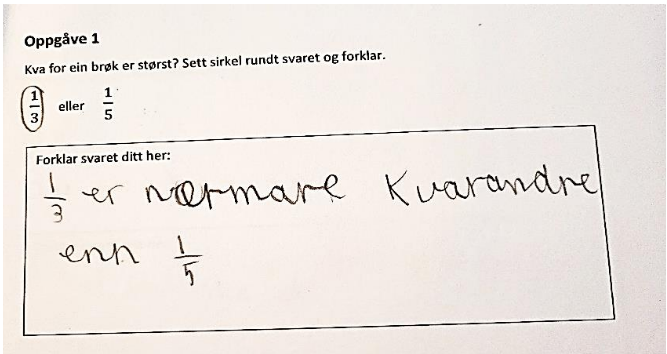
Her virker det som at eleven har en forståelse, men kan har misforstått oppgaven. Vi så derfor på oppgave 18 for å se om det kunne være noe annet. I oppgave 18 skulle elevene lese en tekstoppgave, hvor de skulle finne ut hvor mye som var igjen av en tur. I utgangspunktet skulle det være mindre enn $\frac{1}{4}$. I denne oppgaven hadde eleven krysset av for både $\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{2}$. På spørsmål om hvordan eleven hadde tenkt svarte den:

Jeg var veldig usikker på den oppgaven. Jeg tok de som var mindre enn nevneren der.

Til tross for stor løsningsprosent på oppgave 1 og 8, kan det likevel være bakenforliggende misoppfatninger. Som det vises i elevbesvarelsen i figur 22, er det tydelig at eleven har en annen forståelse. Forståelsen er mer rettet mot misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Der vurderer eleven den differansen man ser mellom teller og nevner når den skal avgjøre hvilken brøk som er størst. Det kan derfor vurderes om oppgaven måler noe annet, eller om det er på grunn av sammenhengen mellom misoppfatningene.

Figur 22.

Eksempel på elevsvar.



4.3.2 *Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken*

Denne misoppfatningen ser på hvor vidt elevene ser på differansen mellom teller og nevner når de avgjør størrelsen på brøken. Her er oppgave 2, 6, 15 og 17 trukket frem. Som vist over er det feilsvar i andre oppgaver knyttet til andre misoppfatninger som indikerer samme tenking som denne misoppfatningen. Det er likevel denne misoppfatningen det er mest av, da 43 elever viste tegn på misoppfatningen. Jeg valgte derfor å inkludere alle oppgavene. Av oppgavene så er det oppgave 6 og 15 som er mest lik, mens de to andre er litt annerledes. I oppgave 6 og 15 er det henholdsvis 65,9 og 61,5 prosent som har svart riktig. Det vil si at over 34 prosent av elevene har svart feil på de to oppgavene. Prosentfordelingen er nok så lik på den siste oppgaven også.

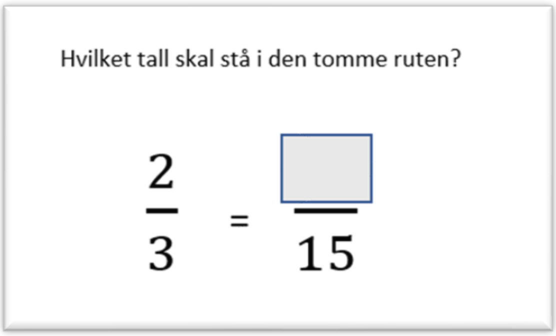
I oppgave 6 skulle elevene fylle ut en tom rute der nevneren er og forklare svaret sitt. Tre av elevene hadde valgt å skrive 4 i nevneren. I intervjuet var det en av elevene valgte å forklare det slik:

> *Elev: At disse her ikke kan byttes ut uten å gå over en stor prosess. Så hadde vært noe annet, så hadde det vært 8 der.*
> *Forsker: Hva mener du med prosess da? Kan du si litt mer om det?*
> *Elev: At jeg skriver disse nedenfor hverandre. Så skriver jeg pluss noe. Så tar jeg er lik. Da kan nevneren bli bytta ut. Nevneren kan ikke bare byttes.*

Ut fra elevens svar, så tolket jeg det slik at eleven brukte addisjon i denne prosessen. Det kan tenkes at eleven bruker addisjon og heltallstenking. Dette kom frem av de to andre også. Da dette ikke var en av misoppfatningene som skulle undersøkes, gikk vi videre til oppgave 15 som var en litt vanskeligere oppgave, men som fokuserte på det samme. I denne oppgaven (figur 23) skulle elevene fylle ut en tom rute der telleren var.

Figur 23.

Oppgave 15 fra oppgavesettet



Her hadde en av elevene som ble intervjuet, skrevet $\frac{14}{15}$. På spørsmål om hvordan eleven løste den svarte den:

Elev: Jeg skrev $\frac{2}{15}$ først, men det ble feil.

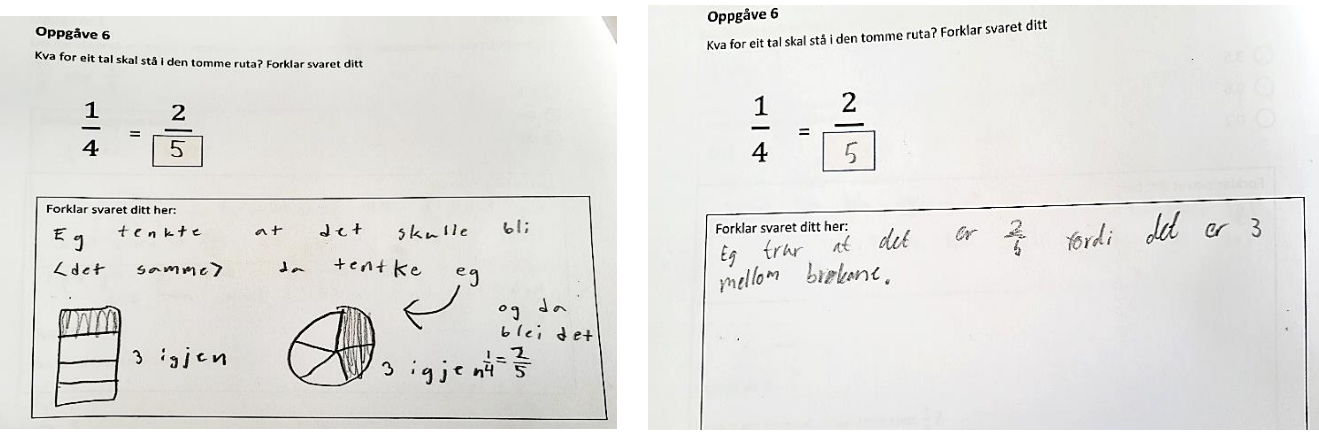
Forsker: Så du skrev det først, og så byttet du til 14?

Elev: Ja. Fordi den var én større enn den, så da.

En annen elev forklarte i intervjuet at det var tre som manglet på oppgave 6 og én som manglet på oppgave 15. Dette hadde eleven skrevet i forklaringsboksen også, som man kan se av figur 24.

Figur 24.

Eksempel på elevsvar på oppgave 6.



På bakgrunn av elevenes besvarelser og forklaringer, kan man se at brøkens tallstørrelse ikke blir vurdert, og at det kun er differansen mellom sifrene i teller og nevner som avgjør. Her blir heltallsforståelsen tatt i bruk, og elevene ser ikke brøken som en selvstendig tallstørrelse. Dette er noe som man ser igjen i de andre misoppfatningene også.

4.3.3 *Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse*

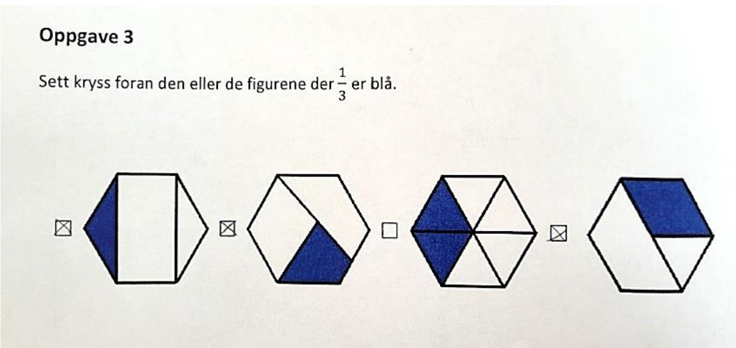
I denne misoppfatningen blir elevene vurdert på hvor vidt de bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen på delene spille noen rolle. Et aktuelt begrep knyttet til dette området, er lik deling av delene. De aktuelle oppgavene var oppgave 3, 12, 16 og 19. Dette var oppgaver av ulik vanskegrad. Tre av oppgavene gikk ut på at elevene skulle krysse av for hvilken figurer som representerte ulike brøker. I oppgave 3 var det 65,9% av elevene som svarte riktig på alternativ tre, men kun 4,4% som svarte riktig på det fjerde alternativet. Det vil si at 34% av elevene krysset av for feilsvarene, og var ikke bevisst på størrelsen på delene. I flere av intervjuene ble denne oppgaven diskutert. Som man kan se av dialogen nedenfor, så kan det vise tegn på misoppfatning.

> *Forsker: Hvorfor valgte du å krysse av der, der og der?*
> *Elev: Fordi der er det en av tre stykk som er fargelagt.*
> *Forsker: Hva med den figuren der du ikke har krysset av da?*
> *Elev: Der er det 2/6.*
> *Forsker: Hva er 2/6 det samme som?*
> *Elev: ¼?*

Flere av elevene poengterte at tre av alternativene viste en av tre som var fargelagt, men at i det siste alternativet var to av seks fargelagt (figur 25). Her så de ikke sammenhengen mellom to brøker, og fokuserte på den brøken oppgaven spurte etter. Her kan man trekke inn det å dele i like deler, men også elevenes vurdering av brøk som tallstørrelse ut fra sifrene i brøken.

Figur 25.

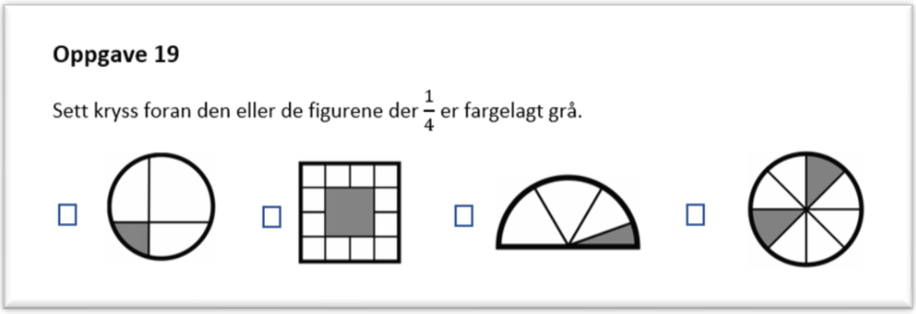
Eksempel på elevsvar på oppgave 3.



Oppgave 19 hadde også visuelle representasjoner hvor elevene skulle finne riktig alternativ. I denne oppgaven var de riktige svarene en utvidet brøk av brøken det ble spurt etter (figur 26). Her hadde 64,8% av eleven riktig på svaralternativ fire, og uten feilsvar. 37,4% av elevene hadde riktig på svaralternativ to uten feilsvar. 26,3 % av elevene hadde ett eller to feilsvar. At elevene velger de to alternativene med fire deler, viser at elevene mangler den grunnleggende forståelsen for å dele i like deler. Her kan det også diskuteres om elevene da ikke valgt de andre alternativene, da brøken ville hatt andre siffer. Likeverdige brøker blir i slike tilfeller ikke vurdert som like, da de har ulike siffer. En slik vurdering vil igjen kunne knyttes til brøk som tallstørrelse, og forholdaspektet.

Figur 26.

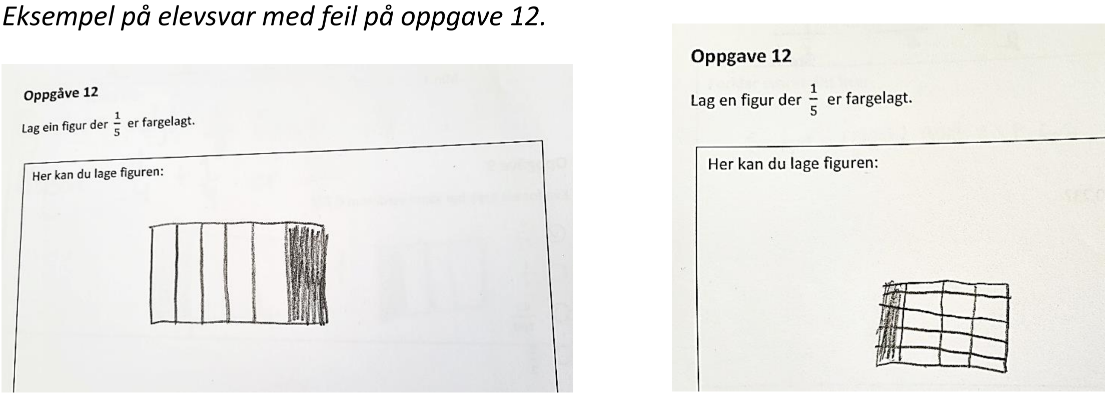
Vurdering av delenes størrelse og likeverdige brøker.



I oppgave 12 skulle elevene lage en figur selv, og ble da vurdert ut fra kriterier for om de vurderte størrelsen på delene når de laget en figur. Som man kan se av eksemplene i figur 27. Her var det 72,5% av elevene som fikk riktig på sitt svar.

Figur 27.

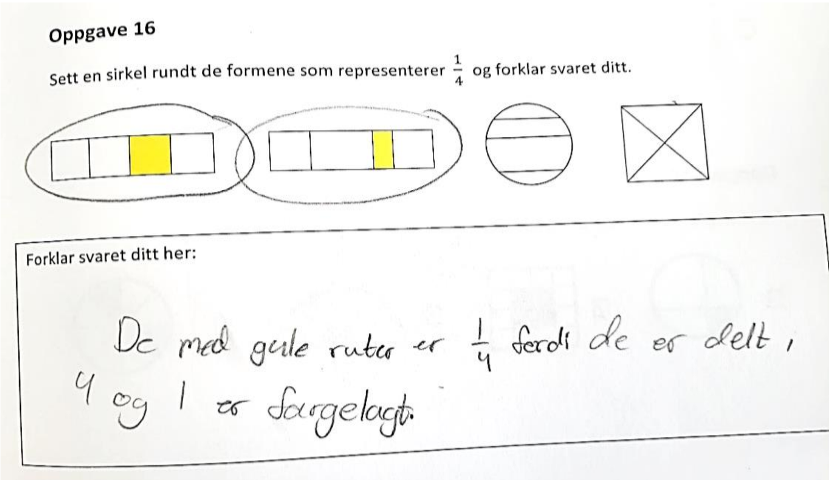
Eksempel på elevsvar med feil på oppgave 12.



I oppgave 16 skulle elevene sette en sirkel rundt de formene som viste $\frac{1}{4}$. Figur 28 viser eksempel på hvordan den oppgaven ble løst. Her var det 78% av elevene som svarte riktig. Totalt sett var det 27,5 % av elevene som viste tegn på misoppfatningen. Her er likevel oppgaveteksten litt utydelig. Her burde det stått «… den eller de formene …». Det er usikkert om det hadde endret resultatet.

Figur 28.

Eksempel på elevsvar på oppgave 16.

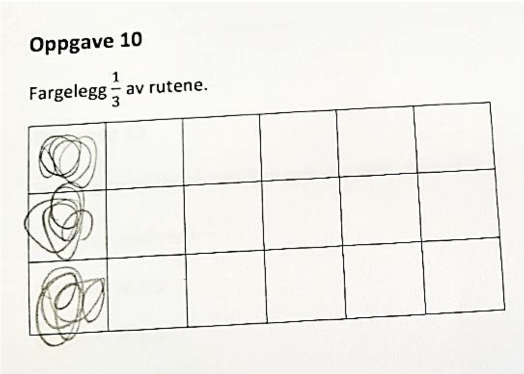


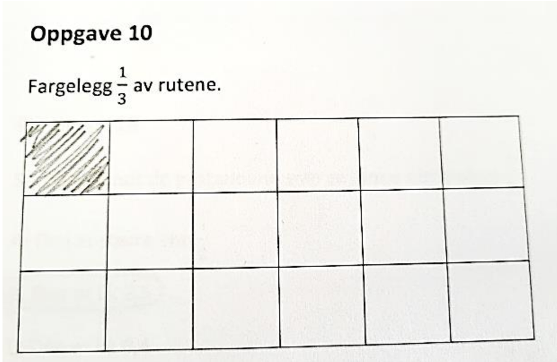
4.3.4 Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall

Den siste misoppfatningen vi skal se på er «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall». Elever som er i den misoppfatningen, vil fokusere på sifferet i telleren eller nevneren når de skal løse oppgaven. Her er to av tre oppgaver dratt frem. På disse to oppgavene (5 og 10) er løsningsprosentene henholdsvis 70,3% og 92,3%. Av alle elevene var det 7,7% som ikke fikk til noen av oppgavene innenfor misoppfatningen. Dette er inkludert oppgave 20. I de to oppgavene som er dratt frem, skulle elevene finne en brøkdel av en gitt mengde. Representasjonene som var brukt var mengdemodell (diskret) og arealmodell (kontinuerlig). Som man kan se av løsningsprosenten, så er det flere elever som har hatt utfordringer med mengdemodellen. Her kan det se ut som at representasjonsformen har hatt betydning. Ser man nærmere på elevsvarene (figur 29 og 30), kan man se at elevene tolker teller eller nevner som et isolert tall.

Figur 29.

Eksempel på elevsvar på oppgave 10.





I noen tilfeller har eleven tolket hele brøken isolert, som man kan se av dialogen fra et intervju under.

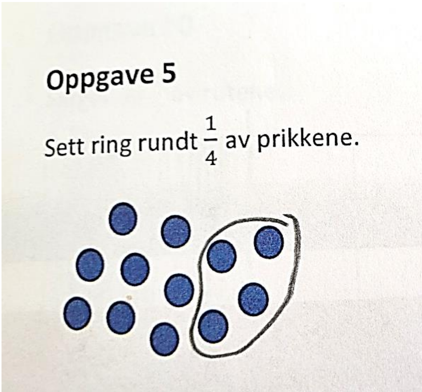
> *Forsker: Så hadde dere den oppgaven her. Oppgave 5 med alle prikkene. Da skulle dere sette runding rundt ¼ av prikkene. Hvordan tenkte du når du skulle løse den?*
> *Elev: Læreren forklarte at dersom man har mange sånne som der, så kan man sette ring rundt der og så er det 4 stykk inni. Og da kan man sette ring rundt den ene.*
> *Forsker: Hvor mange prikker er det totalt?*
> *Elev: 12*
> *Forsker: Da er det 12 prikker. Dersom vi skal ha fire like store deler der.*
> *Elev: Så må du jo dele det i tre deler. Men da går det ikke med ¼. Jeg tenker jeg kunne delt det opp i fire deler og så kunne jeg satt opp en ring rundt den ene delen. Men siden det var 12.*

Her virker det som at eleven er usikker når det er mengder, men samtidig fokuserer på selve brøken isolert. Første eksempelet i figur 30 er interessant. Her har eleven satt ring rundt fire prikker først, og deretter skilt ut en av dem. Den ene prikken er da korrekt ¼ av de fire opprinnelige som var satt ring rundt. Her er det likevel mengden som er det hele, og kan knyttes til representasjoner. Andre elever hadde tolket oppgaven på en annen måte:

> *«Den her? Sett ring rundt en av fire prikker. Så jeg satt ring rundt fire prikker og så rundt en prikk.» (Elev 3)*
> *«Det stod fire i nevneren, så da tok jeg fire.»*

Figur 30.

Eksempel på elevsvar på oppgave 5.



4.4 Hvilke sammenheng kan vi finne mellom misoppfatningene?

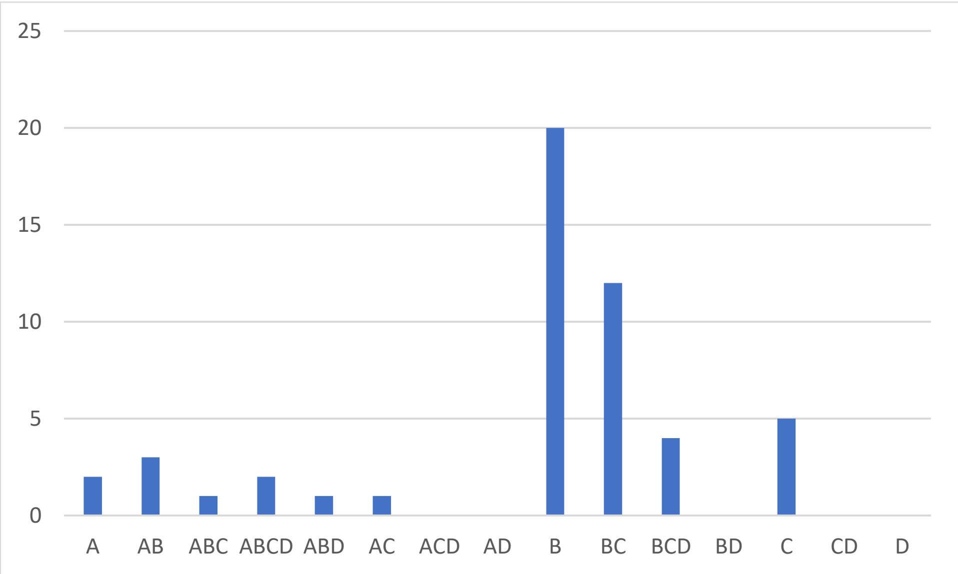
Så langt kan man se at utbredelsen av de ulike misoppfatningene varierer i ulik grad. Det kommer tydelig frem at én misoppfatning har større utbredelse enn de andre, og det er misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Denne misoppfatningen viste en utbredelse på 47,2% blant elevene i utvalget. Det er likevel indikasjoner på fellestrekk mellom misoppfatningene. Jeg skal nå se nærmere på det andre forskningsspørsmålet, *hvilke sammenhenger kan man finne mellom misoppfatningene*? Her vil jeg gå nærmere inn på elevene som er i misoppfatning, og så vil jeg se på mulige korrelasjoner mellom misoppfatningene.

4.4.1 Elevene som er i misoppfatning

Sett ut fra tallene i forrige delkapittel var det 51 av 91 elever som viste tegn på én eller flere misoppfatninger. Dette utgjør 56% av elevene i utvalget. Av disse var det 27 elever som viste tegn på én, 16 viste tegne på to, 6 viste tegn på tre, og 2 som viste tegn på fire misoppfatninger. Det vil si at 52,9% av de elevene som har vist tegn på misoppfatninger, viser tegn på bare én misoppfatning. Ved å ta et bedre blikk på de misoppfatningene som går igjen blant elevene, får jeg diagrammet som er vist i figur 31. Her er elevene sortert ut fra hvilke misoppfatninger de viser. Misoppfatningene er her skiftet ut med bokstaver; A for «jo større nevner, jo større brøk», B for «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken», C for «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», og D for «teller (nevner) eller prosent er et isolert tall».

Figur 31.

Histogram med oversikt over elever fordelt ut fra kombinasjon av misoppfatning.



Diagrammet viser at blant de elevene som har vist tegn på én misoppfatning, så er det 27 av 51 elever (52,9%) som viser tegn på enten misoppfatning A (3,9%), B (39,2%) eller C (9,8%). Som vi har sett tidligere så var misoppfatning B den som var mest utbredt blant elevene. Sett ut fra figuren så opptrer den mye alene, men også i kombinasjon med de andre. Hele 20 elever viste tegn på misoppfatning B alene, og utgjør da 39,2% av elevene som er i misoppfatning. Den mest vanlige kombinasjonen er med misoppfatning C. Som man ser av misoppfatningene, så viser de til teller og nevner i vurdering av størrelse. Her er også det å dele i like deler viktig for misoppfatning C. Som forrige delkapittel viste, så ser elevene på teller og nevner i vurdering av størrelse, og ikke delene. Likeverdige brøker blir vurdert på størrelse ut fra siffer, og ikke delene de representerer.

4.4.2 Korrelasjon mellom misoppfatningene

Til tross for at resultatene viser at de fleste elevene kun viser tegn på én misoppfatning, er det likevel interessant å se hvordan enkelte kombinasjoner er mer vanlig enn andre. Jeg valgte derfor å se nærmere på oppgavene som jeg trakk frem i delkapittel 4.3. Jeg valgte å summere skåre innenfor hver misoppfatning, og utførte en analyse for å se om det var noen korrelasjon mellom dem. Her valgte jeg å inkludere elevenes totale sumskår i prosent på hele oppgavesettet også. Dette for å se om det var samvariasjon mellom de utvalgte oppgavene innenfor hver misoppfatning opp mot den totale skåren. Resultatene er presentert i tabell 10. Her ser jeg bort fra signifikansene, da dataen ikke skal brukes til generaliseringer. Verdiene er likevel gode og støtter samvariasjonen mellom misoppfatningene.

Tabell 10.

Korrelasjoner mellom misoppfatningene.

		Sumskåre_ prosent	*SUM_ JNJB*	*SUM_ND US*	*SUM_DT NS*	*SUM_TN IT*
Sumskåre_prosent	*Pearson Korrelasjon*	*1*				
	Sig. (2-tailed)					
	N	*85*				
	Pearson Korrelasjon	*,565***	*1*			
SUM_ JNJB	*Sig. (2-tailed)*	*<,001*				
	N	*85*	*91*			
	Pearson Korrelasjon	*,648***	*,291***	*1*		
SUM_NDUS	*Sig. (2-tailed)*	*<,001*	*,005*			
	N	*85*	*90*	*90*		
	Pearson Korrelasjon	*,783***	*,434***	*,461***	*1*	
SUM_DTNS	*Sig. (2-tailed)*	*<,001*	*<,001*	*<,001*		
	N	*85*	*90*	*90*	*90*	
	Pearson Korrelasjon	*,556***	*,345***	*,298***	*,532***	*1*
SUM_TNIT	*Sig. (2-tailed)*	*<,001*	*<,001*	*,004*	*<,001*	
	N	*85*	*91*	*90*	*90*	*91*

Note: Signifikant på 0,01 nivå (2-tailed).

Da oppgavegruppene er forsøkt teoretisk sortert opp mot misoppfatningene, indikerer resultatet at det er høy korrelasjon mellom de ulike oppgavegruppene. Korrelasjonsverdiene varierer likevel en del. Ser man misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» opp mot de andre misoppfatningene, viser det korrelasjonsverdi fra 0,434 til 0,532. Dette kan vurderes som en moderat korrelasjonsverdi. Mellom de andre misoppfatningene er verdiene lavere. Ut fra tidligere funn kan man da trekke frem fellestrekkene knyttet til tallstørrelse og heltallsforståelse.

Ved å ta med prosentskåren kan man også se at det er korrelasjon mellom totalskåren og de ulike misoppfatningene. Her vises de høyeste korrelasjonsverdiene, og da «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» med høyest korrelasjonsverdi på 0,783. Dette er en høy verdi, og gir støtte for analysen om utbredelse. Dette er også den misoppfatningen med høyest utbredelse blant elevene i utvalget. Korrelasjonsverdiene mellom oppgavegruppene og den totale sumskåren i prosent, vil også si at de som har gjort det bra innenfor de ulike misoppfatningene, har også gjort det bra totalt sett. Dette gjelder også for de som har prestert på et lavere nivå og prestasjonene innenfor de ulike. Analysene tyder derfor på sammenhenger mellom misoppfatningene.

Dette delkapittelet har sett på det andre forskningsspørsmålet *hvilke sammenhenger kan man finne mellom misoppfatningene*? På bakgrunn av analysene kan man se at misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» var den som var mest utbredt, men den opptrer mye alene. Av de 51 elevene som viste tegn på misoppfatninger, var det 27 elever (52,9%) som viste tegn på én misoppfatning. Av de 27 elevene var det 20 elever som viste tegn på misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Den var også en dominerende misoppfatning i kombinasjon med andre misoppfatninger. Dette gjenspeiles også i korrelasjonsanalysen, hvor de andre misoppfatningene hadde en moderat korrelasjonsverdi opp mot misoppfatningen. Korrelasjonsverdien av misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken», sett opp mot den totale sumskåren i prosent, bidrar til resultatene om utbredelse. Når det kommer til sammenhengene mellom misoppfatningene, så man ulike kombinasjoner. Den mest vanlige kombinasjonen var med misoppfatningene «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» og «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Dette er også de to misoppfatningene som har høyest korrelasjonsverdi mellom seg. Som man ser av misoppfatningene, så viser de til teller og nevner i vurdering av størrelse. Fra de tidligere analysene, kom det frem at heltallsforståelse og vurdering av en brøk som en selvstendig tallstørrelse, var sentralt for flere av misoppfatningene. Det kan argumenteres for at det også her viser slike sammenhenger.

5 Drøfting

Hensikten med denne studien har vært å undersøke sammenhenger og utbredelse av utvalgte misoppfatninger knyttet til brøk på 5. trinn. For å svare på problemstillingen har studien tatt utgangspunkt i definisjonen av misoppfatninger. Misoppfatninger er en bestemt feiltenking; en konsekvent idé. (Brekke, 2002, s. 10; Matematikksenteret, 2019a). Elever kan gjøre feil som følge av at de har lest oppgaven feil, men de kan også få rett på en oppgave selv om forståelsen deres sier noe annet. Resultatet har derfor tatt utgangspunkt i systematisk og repeterende feiltenking gjennom flere oppgaver.

Fra resultatene i kapitel 4, kan man dra frem noen hovedfunn:

- Misoppfatninger hos elever med tilknytning til brøk er vanlig på 5. trinn
- Bestemte misoppfatninger har større utbredelse enn andre
- Det er fellestrekk og korrelasjoner mellom de ulike misoppfatningene

I dette kapitlet vil jeg drøfte hovedfunnene opp mot teorien, samtidig som jeg vil se på mulige didaktiske implikasjoner og muligheter for videre forskning, og gjøre en kritisk refleksjon av studien i seg selv.

5.1 Utbredelse av misoppfatninger knyttet til elevers utfordringer med brøk

Dataen og resultatene fra denne studien viser at det er vanlig med misoppfatninger knyttet til brøkbegrepet blant elevene i utvalget. Det er tydelig at mange elever er i en eller flere misoppfatninger i emnet brøk. På bakgrunn av det, bekrefter studien det tidligere forskning har vist (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010; Ryan & Williams, 2007). Denne studien viser at mer enn halvparten av utvalget, viser tegn på å være i én eller flere misoppfatninger. Det vil si at feiltenkingen er repeterende gjennom flere oppgaver. I studien fant jeg ut at 47,3% av elevene i utvalget, viste tegn på misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken». Dette er enten bare den misoppfatningen alene, eller i kombinasjon med andre. Disse elevene har viste samme feiltenking i flere oppgaver. Resultatene og utbredelsen knyttet til den misoppfatningen samsvarer med andre studier (Mitchell & Horne, 2010; Ryan & Williams, 2007). I mine analyser ble ikke misoppfatningen «brøkstrek er lik desimalkomma» inkludert, da elevene hadde hatt lite eller ingenting om det i undervisningen. Sammenligner man mitt resultat med studien til Vinje (2019), er utbredelsen av misoppfatninger ulik. Hos Vinje (2019), kom «brøkstrek er lik desimalkomma» ut som mest utbredt, og misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken» hadde en liten grad av utbredelse. Dette bekrefter at elever kan ha ulike misoppfatninger avhengig av den forforståelsen de har i møte med brøk (Brodie, 2014; Olivier, 1989). Sett ut fra egen studie og andre studier er det tydelig at misoppfatninger er vanlig.

Ifølge læreplanen (Utdanningsdirektoratet, 2020), jobber elevene eksplisitt med konseptet brøk for første gang på 5. trinn. Som resultatene i denne studien viser, så kan det tyde på at mange av de elevene er i misoppfatning. Dette kan skyldes det kognitive spranget som elevene møter når de går fra heltall til brøk (Matematikksenteret, 2019b; Ni & Zhou, 2005). Elevenes forkunnskap blir utfordret, og det foregår en konseptuell endring i møte med emnet (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Gjennom de første årene i skolen, har elevene konstruert kunnskap og dannet en forståelse for tall som konsept. Dette har tatt utgangspunkt i de hele tallene. Når elevene møter brøk og rasjonale tall, så er det mer komplisert (Dörfler, 1995; Kilpatrick et al., 2001). Dette vises gjennom elevenes resonnement og forklaringer i besvarelsene. Elevene vil ta utgangspunkt i den forkunnskapen de har for å forstå det nye de møter (assimilasjon). I dette tilfellet er det heltallsforståelsen som brukes for å gi mening til brøknotasjonen. I noen tilfeller vil elevene få riktig svar til tross for at forståelsen sier noe annet; noe som vises i elevenes besvarelser.

Etter hvert som elevene jobber med brøkkonseptet vil de få erfare at den nye kunnskapen strider mot det de vet fra før. En slik konflikt gjør at elevene må endre sin forkunnskap og utvide den (akkomodasjon) (Piaget, 1952). Slike endringer tar tid. Det er også i den endringsprosessen at elevene kan havne i misoppfatning (Brodie, 2014; Olivier, 1989). Det viser at elevene bruker sin forkunnskap for å prøve å forstå og gi mening til det nye konseptet de møter; utfordringen med å konseptualisere de rasjonale tallene som et enhetlig system av tall (Kilpatrick et al., 2001; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). At mange av elevene i utvalget viser tegn på misoppfatninger, anser jeg som naturlig da det er første gang de har et eksplisitt fokus på brøk i undervisningen. De jobber med et nytt emne, og misoppfatninger er en del av læringsprosessen (Brekke, 2002; Hansen et al., 2020; Matematikksenteret, 2019j).

Da brøk er et utfordrende emne, vil jeg trekke frem og drøfte noen fellestrekk og begrep. Funn av fellestrekk samsvarer med tilsvarende studie (Vinje, 2019). Et begrep som kan knyttes til alle fire misoppfatningene er tallstørrelse. Det å se brøken som et eget selvstendig tall er viktig. Likevel ser elevene på teller og nevner som isolerte tall. Dette kan knyttes til semiotikken, med tolking og forståelse av brøknotasjonen (Steinbring, 2006). I misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», så de elevene som viste tegn på misoppfatning kun på sifferet i nevneren og antall deler. I oppgave 3 var det flere av elevene poengterte at tre av alternativene viste en av tre som var fargelagt, men at i det siste alternativet var to av seks fargelagt. Her så de ikke sammenhengen mellom to brøker (forholdaspektet), og fokuserte på den brøken oppgaven spurte etter. Her er elevenes vurdering og tolking av brøk som tallstørrelse ut fra sifrene i brøken relevant. Det er individet som konstruerer egen kunnskap og ser sammenhengene mellom tegnet og kontekstene (Steinbring, 2006). Her har elevene en annen tolking og forståelse enn det som er meningen bak konseptet. I misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken» ser elevene på teller og nevner som separate tallstørrelser, hvor det da er differansen mellom dem som avgjør. Dette var den mest utbredte misoppfatningen blant utvalget i studien. Misoppfatningen er koblet til heltallstenking, og bli omtalt som «gap thinking» innen internasjonal forskning (Bjerke et al., 2013; Mitchell & Horne, 2010; Pearn &

Stephens, 2004). Her blir ikke brøkens størrelse vurdert; kun differansen. Igjen, blir ikke brøkens notasjon sett som en tallstørrelse. De to siste misoppfatningene «jo større nevner (eller teller), jo større brøk» og «teller (eller nevner) er et isolert tall», ser fullt og helt på teller eller nevner som isolerte tall. Analysene viste at disse to misoppfatningene var minst utbredt. Her bruker elevene den forkunnskapen de har om heltall i møte med brøk og vurdering av størrelse. Dette var omtalt som heltallstenking eller «whole number bias» i teorikapitlet (Jordan et al., 2017; Ni & Zhou, 2005; Siegler et al., 2011; Torbeyns et al., 2015). Som misoppfatningene viser, vil det å ha forståelse for brøkens notasjon og den tallstørrelsen den representerer, være viktig for den grunnleggende forståelsen av brøk. Som Duval (2006, s. 107) sier så kan man ikke observere tallet $\frac{1}{2}$ i miljøet. Her må forståelsen skapes gjennom medieringen av konseptet brøk; referansekontekster og representasjoner (Duval, 2006; Kilpatrick et al., 2001; R. A. Lesh et al., 1976; Ryan & Williams, 2007; Steinbring, 2006; Svingen, 2018). Det handler om å forstå at enhver brøk er en individuell tallstørrelse og har sin egen plass på tallinjen (Siegler et al., 2011).

I tillegg til tallstørrelse, ble det å dele likt nevnt i analysedelen. Konseptet del av det hele er tett knyttet til dette. Det kan argumenteres for at en forståelse av å dele likt er tett knyttet til en forståelse for tallstørrelse. I enkelte besvarelser ble brøker sammenlignet ved bruk av figurer. Her var ikke elevene bevisst, og sammenlignet størrelsene uten at delene var like (figur 24). Dette gjaldt også det hele (enheten). Her kunne elevene likevel svare riktig til tross for at forklaringen viste noe annet. Begrepet kan kobles til flere misoppfatninger, men har størst tilknytning til misoppfatningen «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse». Dette var den misoppfatningene som hadde nest høyest utbredelse, og som ble sett i kombinasjon med misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken». At det var en misoppfatning man så mye av, er i samsvar med andre studier og elevers utfordringer med å dele i like deler (Clements et al., 2013; Matematikksenteret, 2019b; McIntosh, 2007; Ryan & Williams, 2007). Hvordan elever ser på brøken knyttet til en figur, kan variere. I et intervju, hvor oppgave 3 ble diskutert, fokuserte eleven på antall deler. Her var det fire alternativ, hvor to av figurene ikke tilsvarte 1/3. Som resultatene og elevenes utsagn viser, så er ikke elevene bevisst på størrelsen på delene. Om elevene da ikke kan vurdere størrelsen på brøken, kan det føre til utfordringer med å vurdere deling av like deler, og omvendt. Her er tolking og referansekontekst sentralt.

Elevene har med seg erfaring med deling fra hverdagen, og kobler det ofte til kake eller pizza. Forskning viser at arealmodeller blir hyppig brukt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Neagoy, 2017). Under intervjuene, og ved å se på forklaringene som elevene hadde på enkelte oppgaver, var pizza og kake tydelig representert. På spørsmål om for eksempel klosser eller klinkekuler (mengdemodeller), var det ukjent for elevene. Dette kan kobles til oppgave 5 og de tolv prikkene. Elevene som velger å fokusere på teller eller nevner isolert sett, ser ikke mengden som helhet. Det viser også at eleven ikke har forståelse for brøken sett som tallstørrelse opp mot en mengde, og klarer heller ikke å dele opp i fire like deler. Om elevene kun får erfaring med arealmodeller, og ikke andre representasjoner, så kan det være uheldig for forståelsen (Bjerke & Pettersen, 2012, s. 26). Deling er svært sentralt i konstruksjonen av brøkforståelsen (Lamon, 2020; Petit et al., 2010), og det er viktig at elevene forstår de grunnleggende reglene når det gjelder deling. Lamon (2020, s. 183) referer til dem som følgende:

- The unit must be divided into equal shares.
- If a unit consists of more than one item, the items must be the same size.
- Equal means equal in amount, but shares do not always have the same number of pieces.
- Equal shares do not have to have the same shape.
- When we have a choice about the shape we use, for example, in representing a cake, we anticipate the number of pieces we will need and choose the shape accordingly. Sometimes it is easier to use a rectangular cake than a round one. (Lamon, 2020, s. 183)

Å ha forståelse for disse grunnleggende reglene innebærer at elevene må få erfaring med dem også. Dette kan knyttes til det semiotiske og det å gi mening til konsept ved bruk av ulike representasjoner og referansekontekster (R. A. Lesh et al., 1976; Steinbring, 2006;

Svingen, 2018). Lamon (2020) sier at elevene må utsettes for ulike delingsaktiviteter i undervisningen. Dette støttes av Behr og Post fra 1992 (sitert i Petit et. al., 2010, s. 57) som sier at «*early experiences with physically partitioning objects or sets of objects may be as important to a child's development of fraction concepts as counting is to their development of whole number concepts".* Ved bruk av visuelle representasjoner og konkreter kan elevene utføre delingen selv. Det er likevel viktig å huske at konkreter skal være hjelpemidler for forståelsen, og ikke er direkte visualiseringer (Kaufmann, 2010). Som teorien sier, så er variasjon i representasjoner, referansekontekster og bruk av ulike modeller viktig for å få en dypere forståelse av brøkbegrepet (Duval, 2006; Kilpatrick et al., 2001; Ryan & Williams, 2007; Tsai & Li, 2017). Det vil si at man som lærer må være bevisst på hvordan man legger opp undervisning, og legger til rette for variasjon.

5.2 Sammenhenger mellom misoppfatningene

Et av hovedfunnene indikerte at det var korrelasjoner mellom misoppfatningene og elevenes resultat. Analysene viste at gruppering av oppgavene knytt til de ulike misoppfatningene, hadde høy samvariasjon, samtidig som de korrelerte med elevenes totale prosentskåre. Det siste vil si at det var samvariasjon mellom elevenes prestasjoner innenfor de ulike misoppfatningene og totalskåren. Dette kan også knyttes til resultatet for korrelasjon på enkeltoppgavenivå. Som tabell 10 viste, så var elevenes prestasjoner knyttet til de ulike misoppfatningene spredd utover på nivåene. Dette gjenspeiler at mange av elevene viste tegn på mer enn én misoppfatning. Som nevnt i forrige delkapittel, så kan man se en sammenheng mellom misoppfatningene gjennom begrepet tallstørrelse. Dette var igjen koblet til heltallstenking. Sett ut fra modellen fra Behr et al. (1983) (figur 1), kan man tolke det som at brøkaspektet som er knyttet til mål og størrelse legger grunnlaget for videre arbeid med problemløsing og addisjon innen brøk. Til tross for at det ikke er knyttet til de andre aspektene gjennom modellen, vil jeg si at forståelsen for en brøk som tallstørrelse påvirker alle områder i modellen. For aspektet forhold handlet det om å sammenligne størrelser (Behr et al., 1983; Bondø & Tokle, 2018; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Lamon, 2020), noe som viste seg å være utfordrende for elevene innenfor flere av oppgavene. Mot aspektet del-hel, kan man knytte det til størrelser på delene, like deler, og hvordan elevene sammenligner i slike oppgaver. Man kan også knytte det mot operator og kvotient aspektene som ikke er diskutert. Dette er fordi forståelsen av brøknotasjonen som tallstørrelse vil være viktig for hvordan man forstå aspektet. For å en helhetlig forståelse for brøkbegrepet måtte man beherske alle fem aspektene (Alseth, 1998; Bjerke et al., 2013; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Man kan på den måten si at det er et gjensidig avhengighetsforhold mellom aspektene.

Som studien og resultatene viser, så er de elevene som er i misoppfatning, gjerne i ulike kombinasjoner av misoppfatninger. Det er et flertall av elever som viser tegn på kun én misoppfatning, og da i hovedsak knyttet til misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken». I diagrammet i figur 20 var elevene fordelt ut fra antall misoppfatninger de viste tegn på. Resultatet i diagrammet viser at man ikke nødvendigvis er i flere misoppfatninger om man er i én. Dette kan være avhengig av forkunnskap og hvordan de tolker og tilpasser den nye kunnskapen til det de kan fra før (Brodie, 2014; Olivier, 1989). I et konstruktivistisk perspektiv konstruerer elevene ny kunnskap basert på tidligere kunnskap. Dette kan være med på å forklare at elevene er i ulike misoppfatninger (Ay, 2017). Man kommer jo inn med ulik forkunnskap og ulike utgangspunkt, og det er derfor naturlig at man da kan være i ulike misoppfatninger også. I diagrammet i figur 31 var elevene fordelt utfra kombinasjoner av misoppfatninger. Diagrammet viser at 27 elever viste tegn på kun én misoppfatning, hvor 20 av dem var i tilknytting misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken». De syv andre var fordelt på «jo større nevner (teller), jo større brøk» og «nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse», med vekt på sistnevnte. Sistnevnte misoppfatning var også den som var sett mest i kombinasjon med «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken». Sett opp mot hverandre, indikerer resultatene at begrepet tallstørrelse er særlig viktig for elevers forståelse, men også elevenes forståelse av å dele likt. Slik jeg tolker det, er dette to begrep som påvirker hverandre, og de er grunnleggende for forståelsen. Dette er noe jeg mener man bør være bevisst på i planlegging og gjennomføring av brøkundervisning.

5.3 Implikasjoner og veien videre

Som studien viser, så er misoppfatninger vanlig på 5. trinn. Når man ser antallet elever som er i misoppfatning og utbredelsen av misoppfatningene, så bør man vurdere hvilke implikasjoner det har for videre undervisning. Da teorien viser hvilke konsekvenser brøkforståelsen har for videre skoleløp (Bailey et al., 2012; Booth & Newton, 2012; Jordan et al., 2017; Siegler et al., 2012; Tsai & Li, 2017), er det viktig at man tar tak i det. Misoppfatninger kan brukes som noe produktivt og være en enorm ressurs for elevers forståelse (Cockburn & Littler, 2008; Hansen et al., 2020; Ryan & Williams, 2007). Det kan spille en konstruktiv rolle i klasseromsdiskusjoner (Hiebert et al., 1997) og undervisningen generelt, da elevene lærer matematikk ved å konstruere mening gjennom egne kognitive evner (Piaget, 1970). Misoppfatninger kan være en naturlig del av læringsprosessen (Hansson, 2020; Matematikksenteret, 2019j), og det er derfor viktig at man som lærer tar tak i de feilene og misoppfatningene som oppstår (Skott, 2019). I arbeidet med misoppfatninger, er kognitive konflikter et redskap for å hjelpe elevene ut av misoppfatningene (Brekke, 2002). Dette vil også kreve at man som lærer har både kunnskap om misoppfatninger og hvordan man jobber med det. Endring av elevers forståelse tar tid.

I tillegg har studien analysert og drøftet misoppfatningene med utgangspunkt i fellestrekk knyttet til semiotikken. Her var det særlig tallstørrelse som var relevant, men også elevenes forståelse av å dele likt. Disse trekkene fremstår som viktig for den grunnleggende forståelsen, og kan jobbes med gjennom delingsaktiviteter og variasjon i både representasjonsformer, modeller og referansekontekster (Kurt & Cakiroglu, 2009; Lamon, 2020; Pearn & Stephens, 2004; Petit et al., 2010; Ryan & Williams, 2007; Siegler et al., 2011; Sowder, 1988). I forrige delkapittel argumenterte jeg for at forståelsen for en brøk som tallstørrelse påvirker alle fem aspektene i Behr et al. (1983) sin modell; at det er et avhengighetsforhold mellom dem. Forskning viser at man må jobbe med alle fem brøkaspektene for at elevene skal få en helhetlig brøkforståelse. Da er det viktig at det grunnleggende ligger til grunn. Det krever at lærere legge til rette for en undervisning med fokus på å skape relasjonell forståelse. Undervisningen er sentral for elevers forståelse (Bjerke & Pettersen, 2012; Tsai & Li, 2017). Svingen (2018) sier at man må være i stand til å se sammenhenger mellom representasjonene for å utvikle dyp forståelse i matematikk. Elevene må forstå hvordan ting henger sammen; både algoritmer og sammenhenger på tvers av emner.

Dette var en liten studie, men tallene gjør det interessant å se videre på elevers misoppfatninger knyttet til brøk. Et emne som jeg ikke har gått inn på, men som blant annet er sett på i SPEED-prosjektet (Opsvik & Skorpen, 2017), er elever med spesialundervisning. Der ser man ikke eksplisitt på misoppfatninger og elevers brøkforståelse, men er innom det i oppgavene knytt til brøk i kartleggingsprøven. Jordan et al. (2017) snakker i sin studie om elever med spesialundervisning, og hvordan de er mer utsatt for større vansker i matematikk som følge av svak brøkforståelse. Dette er derfor et emne som kan være interessant å forske nærmere på.

En annen retning kunne vært undervisning av rasjonale tall, og hvordan de ulike aspektene blir vektlagt i norske klasserom. Her kan fremtidig forskning inneholde eksperimentelle design som tar utgangspunkt i slik undervisning. Det nærmeste jeg har funnet av forskning rettet mot undervisning, var studien av Moss og Case (1999), som så på rekkefølgen på de rasjonale tallene som elevene møter. Det er vertfall et spennende emne som fortjener fokus slik at man kan bedre elevers læring.

5.4 Begrensninger og svakheter ved studien

Først vil jeg rette blikket mot analysemetoden. Med lite erfaring knyttet til programmet SPSS, ble det utfordrende å utføre de nødvendige analysene. Det ble derfor brukt Excel i tillegg. Valget om å innhente egne data, og legge inn egne variabler, ble også utfordrende da jeg ikke kjente til programmet godt nok. Med bedre kompetanse innenfor programmet kunne jeg lagt inn flere svaralternativer som ga et tydeligere bilde på datamaterialet, og det kunne blitt mer utfyllende analyser. Når det gjelder selve datamaterialet, burde alle oppgavene vært besvart. For å sikre det, kunne jeg ha sett gjennom hver besvarelse i det jeg samlet inn. Da kunne jeg gått tilbake til de elevene som manglet svar og se om de hadde glemt oppgaven, og om de ville prøve å svare.

Jeg vil nå rette et kritisk blikk på selve oppgavesettet. Omfanget og tidsbruk var riktig anslått, men oppgavene i seg selv kunne vært noe endret. Sett ut fra faktoranalysen, så var det flere av oppgavene som ikke havnet sammen til tross for at de skulle måle det samme. Oppgave 11 skilte seg klart ut fra de andre oppgavene, og her ville en forklaringsrute vært behjelpelig. Dette kunne gitt meg et bedre innblikk i hvordan elevene forstod oppgaven, og om oppgaveteksten var tydelig nok. Dette gjelder for så vidt flere oppgaver, og for videre forsking ville elevenes forklaring i oppgavene blitt prioritert. De respektive lærerne ved skolene som deltok, nevnte at det var enkelte ord som var ukjent for elevene. Det var derfor viktig at elevene fikk mulighet til å spørre dersom de ikke forstod oppgaveteksten. Om det har påvirket resultatet er vanskelig å si. I etterkant så jeg at også at oppgave 16 hadde en litt utydelig oppgavetekst. Der stod det «Sett sirkel rundt de formene …». Her burde det stått «… den eller de formene …». Som vist til i teorien, så er også variasjon av representasjonsformer innenfor de ulike aspektene viktig. Det var derfor noe jeg prøvde å få til i oppgavene også. I etterkant av datainnsamlingen, kom jeg likevel frem til at variasjonen kunne vært større. Det var variasjon mellom misoppfatningene, men når det kommer til representasjonsformene innenfor de ulike misoppfatningene, så kunne det variert i større grad. Her syns jeg selv at det kan bli litt ensformig innenfor enkelte oppgavegrupperinger.

Under de første intervjuene kom det frem at intervjuene burde foregå rett etter datainnsamlingen. Dette var ikke mulig på den første skolen da alle gjennomførte samme dagen, og det ikke var nok tid til å få sett gjennom besvarelsene og plukke ut elever til intervju. Den erfaringen tok jeg med videre til de andre skolene som deltok. Til tross for ulik gjennomføring på intervjuene, så fikk jeg mye god informasjon. I etterkant ser jeg likevel at jeg som forsker er noe ledende i spørsmålene. Dette ble noe bedre gjennom de ni intervjuene. Intervjuene ga også et godt innblikk i elevenes forståelse, og vi hadde gode matematiske samtaler. I noen av intervjuene klarte jeg å fremprovosere en kognitiv konflikt litt tidligere enn ønsket, og det ble noe jeg måtte prøve å være bevisst på gjennom de andre intervjuene.

Studien skulle være en mikset studie, men med hovedvekt på det kvantitative. Datamaterialet har vært veldig interessant, og har fungert på en god måte til arbeidet som ble utført. Antall deltakere i utvalget ser jeg derimot som en svakhet ved studien. Til tross for at jeg avgrenset studien til fylket, var det svært få skoler som vil delta i prosjektet. Utvalget på 91 elever gjorde det likevel mulig å gjøre funn, men funnene kan ikke generaliseres da utvalget ikke er representativt. Sett opp mot annen forskning på området, mener jeg likevel at min studie er et godt bidrag til norsk forskning på området.

6 Konklusjon

Hensikten med studien har vært å undersøke sammenhenger og utbredelse av utvalgte misoppfatninger knyttet til brøk på 5. trinn. Dette var basert på tidligere forskning som sier at brøk er et svært utfordrende emne innenfor matematikken, og forskning som viser at brøkforståelse kan påvirke prestasjoner i andre matematikkemner. I studien er brøkforståelse knyttet til semiotikken og meningsskaping knyttet til tegn og konsept. Konstruksjon av kunnskap basert på tidligere kunnskap er særlig relevant, og prosessen kan føre til misoppfatninger. Det er viktig å ta med seg at misoppfatninger er en naturlig del av elevenes læring, og bør vektlegges i undervisningen som en ressurs. Studien var en mixed-methods studie med utgangspunkt i et oppgavesett og elevintervju. Datainnsamlingen og resultatene som kom ut av det, gjorde det mulig å se på utbredelse og sammenhenger.

Som resultatene viser, så varierer utbredelsen av de ulike misoppfatningene, men noen er tydeligere enn andre. Her er det interessant å se at misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken» har størst utbredelse blant elevene i denne studiens utvalg. Denne misoppfatningen har bakgrunn i det som har blitt kalt «gap thinking» i internasjonal forskning. Dette er en misoppfatning som er blitt trukket frem som vanlig hos elever, og gir en bekreftelse på resultatene i denne studien. Da misoppfatninger er definert som systematisk og repeterende feiltenking, var det viktig å finne besvarelser hvor elever viste tegn på misoppfatning i flere oppgaver. På bakgrunn av det, har over halvparten av besvarelsene vist elever med tegn på én eller flere misoppfatninger. En av misoppfatningene ble tatt vekk i analysen på bakgrunn av elevenes progresjon i emnet. Likevel viser resultatene at for tre av fem misoppfatninger, så er utbredelsen over 10% blant elevene i utvalget. Utbredelsen varierer likevel ut fra hvilke kombinasjoner og hvor mange misoppfatninger man viser tegn på. Dette kan knyttes til elevers forforståelse og hvordan konstruering av ny kunnskap kan føre til at elevene havner i misoppfatning. I studiens datamateriale, er det også tydelig at misoppfatninger kan forekomme på alle mestringsnivå, og ikke bare hos de som presterer på lavest nivå.

Sammenhengene mellom misoppfatningene tyder på at heltallstenking er en faktor som spiller inn. Her vektlegges fokuset på brøknotasjonen som tallstørrelse og hvordan elevers forståelse av dette aspektet kan påvirke elevers brøkforståelse. Den mest utbredte misoppfatningen «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken», er et godt eksempel på hvordan elevene skiller sifrene i teller og nevner og ikke ser brøken som en individuell tallstørrelse. Det viser elevenes tolking og meningsskaping av brøknotasjonen, men også hvor viktig medieringen av konseptet mellom ulike representasjoner og referansekontekster er for å skape forståelse. Dette er et trekk som går igjen i de andre misoppfatningene også, og resultatene indikerer samvariasjon mellom de andre misoppfatningene opp mot «differansen mellom teller og nevner, avgjør størrelsen på brøken». Til tross for at tallforståelse ser ut til å være en grunnleggende faktor i brøkforståelse, så betyr ikke det at man er i alle misoppfatningene om man er i én. Det er derfor viktig å ta hensyn til elevenes individuelle utgangspunkt og den forkunnskapen de har i møte med brøk, og legge til rette for undervisning som viser sammenheng på tvers av og innenfor de ulike brøkaspektene.

Referanser

Alseth, B. (1998). *Kartlegging av matematikkforståelse. Matematikk på småskoletrinnet. (KIM-prosjektet)*. Nasjonalt læremiddelsenter. https://docplayer.me/281504-Matematikk-pa-smaskoletrinnet.html

Apuke, O. D. (2017). Quantitative Research Methods: A Synopsis Approach. *Kuwait Chapter of Arabian Journal of Business and Management Review*, *6*(11), 40–47. https://doi.org/10.12816/0040336

Ay, Y. (2017). A Review of Research on The Misconceptions in Mathematics Education. I M. Shelley & M. Pehlivan (Red.), *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017* (s. 21–31). ISRES Publishing. https://www.isres.org/a-review-of-research-on-the-misconceptions-in-mathematics-education-70-s.html#.YodyWoxBxPb

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of experimental child psychology*, *133*(3), 447–455. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Befring, E. (2015). *Forskningsmetoder i utdanningsvitenskap*. Cappelen Damm Akademisk.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. I R. A. Lesh & M. Landau (Red.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (s. 91–126). Academic Press. https://www.researchgate.net/publication/258510439_Rational_number_concepts

Belbase, S. (2013). Images, Anxieties, and Attitudes toward Mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *1*(4), 230–237.

Bergem, O. K. (2016). Hovedresultater i matematikk. I O. K. Bergem, H. Kaarstein, & T. Nilsen, *Vi kan lykkes i realfag*. Universitetsforlaget. https://www.idunn.no/vi-kan-lykkes-i-realfag

Bergem, O. K., Kaarstein, H., & Nilsen, T. (2016). *Vi kan lykkes i realfag*. Universitetsforlaget. https://www.idunn.no/vi-kan-lykkes-i-realfag

Bidwell, J. K. (1966). *An Introduction to Rational Numbers, Units 1-6.* Office of Education, D.C Burreau of Research. https://eric.ed.gov/?id=ED036434

Bjerke, A. H., Eriksen, E., Rodal, C., & Ånestad, G. (2013). Når brøk ikke er tall—Eksempler på misoppfatninger knyttet til brøk som tallstørrelse. *ResearchGate*. FoU i praksis 2012 conference procedings, Trondheim. https://www.researchgate.net/publication/330448691_Nar_brok_ikke_er_tall_-_Eksempler_pa_misoppfatninger_knyttet_til_brok_som_tallstorrelse

Bjerke, A. H., & Pettersen, N. (2012). Brøk med brikker. *Tangenten: Tidsskrift for matematikk i grunnskolen*, *3*, 26–32.

Boaler, J. (2015). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. John Wiley & Sons, Incorporated. http://ebookcentral.proquest.com/lib/hivolda-ebooks/detail.action?docID=4444210

Bondø, A., & Tokle, O. D. (2018). *Realfagsløyper: Problemområder knyttet til brøk*. Matematikksenteret. https://realfagsloyper.no/sites/default/files/2018-04/Bond%c3%b8,%20Tokle%20-%20Problemomra%cc%8ader%20knyttet%20til%20br%c3%b8k_0.pdf

Booth, J., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(4), 247–253. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Brekke, G. (1995). *Kartlegging av matematikkforståelse. Veiledning til tall og tallregning. (KIM-prosjektet)*. Læringssenteret. https://home.usn.no/panderse/KIMhefter/kimgammeltall.pdf

Brekke, G. (2002). *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk kartlegging av matematikkforståelse. (KIM-prosjektet)*. Læringssenteret. https://web01.usn.no/~panderse/KIMhefter/kimgammeldiag.pdf

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(2), 221–239. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9507-1

Bruin, J. (2011). *What does Cronbach's alpha mean? | SPSS FAQ*. Introduction to SAS. https://stats.oarc.ucla.edu/spss/faq/what-does-cronbachs-alpha-mean/

Bush, S. B. (2011). *Analyzing common algebra-related misconceptions and errors of middle school students.* [University of Louisville]. https://doi.org/10.18297/etd/187

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*(3), 293–316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Chi, M. T. H., & Roscoe, R. D. (2002). The Processes and Challenges of Conceptual Change. I M. Limón & L. Mason (Red.), *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice* (s. 3–27). Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47637-1_1

Clements, P., Buffington, P., & Tobey, C. (2013). *Middle-grade students' misconceptions about the graphical representation of simple fractions: An Assessment from the Eliciting Mathematical Misconceptions Project.* 13. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED563363.pdf

Cockburn, A. D., & Littler, G. (2008). *Mathematical Misconceptions: A Guide for Primary Teachers*. SAGE Publications Ltd. https://doi.org/10.4135/9781446269121

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (Eighth edition). Routledge. https://www.daneshnamehicsa.ir/userfiles/files/1/9-%20Research%20Methods%20in%20Education%20by%20Louis%20Cohen,%20Lawrence%20Manion,%20Keith%20Morrison.pdf

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, *16*(3), 297–334.

Davis, G., Hunting, R. P., & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *The Journal of Mathematical Behavior*, *12*(1), 63–76. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Dörfler, W. (1995). Mathematical Objects, Representations, and Imagery. I R. Sutherland & J. Mason (Red.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (Bd. 138, s. 82–94). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0_6

Edmonds, W. A., & Kennedy, T. D. (2017). *An Applied Guide to Research Designs: Quantitative, Qualitative, and Mixed Methods*. SAGE Publications, Inc. https://doi.org/10.4135/9781071802779

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education. Models and processes.* Routledge.

Field, A. P. (2013). *Discovering statistics using IBM SPSS statistics: And sex and drugs and rock «n» roll* (4th edition). Sage.

Friborg, O. (2011). *Faktoranalyse*. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/235437791_Faktoranalyse_Factor_analysis

Geert van den Berg. (u.å.). *SPSS One Sample T-Test—Beginners Tutorial*. Hentet 22. april 2022, fra https://www.spss-tutorials.com/spss-one-sample-t-test/

Grønmo, L. S. (2013). Algebra og tall er motoren i matematikken – derfor går matematikkfaget i Norden for halv fart. *Bedre skole*. https://utdanningsforskning.no/artikler/2013/algebra-og-tall-er-motoren-i-matematikken--derfor-gar-matematikkfaget-i-norden-for-halv-fart/

Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A., & Mullis, I. V. S. (2013). TIMSS 2015 Mathematics Framework. I *TIMSS 2015 Assessment Frameworks* (s. 17). TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College. https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap1.pdf

Hansen, A., Drews, D., Dudgerton, J., Lawton, F., & Surtees, L. (2020). *Children's errors in mathematics* (5. utg.). SAGE PUBLICATIONS.

Hansson, S. O. (2020). Technology and Mathematics. *Philosophy & Technology*, *33*(1), 117–139. https://doi.org/10.1007/s13347-019-00348-9

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings? *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(97)00026-1

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Murray, H., & Wearne, D. (Red.). (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1983). *Students' Conceptions of Decimal Numbers.* https://eric.ed.gov/?id=ED230415

Im, S., & Jitendra, A. K. (2020). Analysis of proportional reasoning and misconceptions among students with mathematical learning disabilities. *The Journal of Mathematical Behavior*, *57*, 100753. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.100753

Imsen, G. (1998). Elevens verden: Innføring i pedagogisk psykologi. I *Barnebokinstituttet* (3. utg.). Tano Aschehoug. https://urn.nb.no/URN:NBN:no-nb_digibok_2008080804116

Jensen, F., Pettersen, A., Frønes, T. S., Kjærnsli, M., Rohatgi, A., Eriksen, A., & Narvhus, E. K. (2019). *PISA 2018. Norske elevers kompetanse i lesing, matematikk og naturfag*. Universitetsforlaget. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/pisa/publikasjoner/publikasjoner/pisa2018_kortrapport.pdf

Jordan, N. C., Resnick, I., Rodrigues, J., Hansen, N., & Dyson, N. (2017). Delaware Longitudinal Study of Fraction Learning: Implications for Helping Children With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, *50*(6), 621–630. https://doi.org/10.1177/0022219416662033

Karlsen, L., & Klaveness, E. (2019). Favorittfeil og forhandling om mening. I E. Klaveness, L. Karlsen, & K. Kverndåkken (Red.), *101 grep for å aktivisere elever i matematikk* (s. 107–129). Fagbokforlaget.

Kaufmann, O. T. (2010). Bruk av konkreter. *Tangenten: Tidsskrift for matematikk i grunnskolen*, *1*, 23–26.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. I R. Lesh & D. A. Bradbard (Red.), *Number and measurement: Papers for a research workshop* (s. 101–144). Eric. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://nap.nationalacademies.org/read/9822/chapter/1

Kleven, T. A., & Hjardemaal, F. R. (2018). *Innføring i pedagogisk forskningsmetode* (3. utg.). Fagbokforlaget.

Kristensen, O., & Aanesen, S. (2019, mai 12). *Standardavvik—Matematikk 2P-Y (LK06)—NDLA*. ndla.no. https://ndla.no/nb/subject:1:38bc9538-63fd-48f3-9085-c2142dafd64c/topic:2:1:164958/resource:1:91885

Kunnskapsdepartementet. (2015). *Tett på realfag. Nasjonal strategi for realfag i barnehagen og grunnopplæringen (2015–2019)*. Regjeringen.no. https://www.regjeringen.no/contentassets/869faa81d1d740d297776740e67e3e65/kd_realfagsstrategi.pdf

Kunnskapsdepartementet. (2022, januar 6). *Realfagstrategien ga ikke bedre resultater eller motivasjon* [Pressemelding]. Regjeringen.no. https://www.regjeringen.no/no/aktuelt/realfagstrategien-ga-ikke-bedre-resultater-eller-motivasjon/id2894639/

Kurt, G., & Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences*, *19*(4), 404–410. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.02.005

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2015). *Det kvalitative forskningsintervju* (T. M. Anderssen & J. Rygge, Overs.; 3. utg.). Gyldendal akademisk.

Kaarstein, H., Radišić, J., Lehre, A.-C., Nilsen, T., & Bergem, O. K. (2020). *TIMMS 2019. Kortrapport.* Institutt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitetet i Oslo. https://www.uv.uio.no/ils/forskning/prosjekter/timss/2019/timss-2019-kortrapport.pdf

Lamon, S. J. (2020). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (Fourth edition). Routledge, Taylor and Francis Group. https://1lib.sk/book/5867306/e0e2b5

LeFevre, J.-A., DeStefano, D., Coleman, B., & Shanahan, T. (2005). Mathematical cognition and working memory. I J. I. D. Campbell, *Handbook of mathematical cognition* (s. 361–378). Psychology Press. https://www.academia.edu/36509722/Handbook_of_Mathematical_Cognition

Leonard, M. J., Kalinowski, S. T., & Andrews, T. C. (2014). Misconceptions Yesterday, Today, and Tomorrow. *CBE—Life Sciences Education*, *13*(2), 179–186. https://doi.org/10.1187/cbe.13-12-0244

Lesh, R. A., Bradbard, D. A., & Lesh, R. (Red.). (1976). Directions for research concerning number and measurement concepts. I *Number and Measurement. Papers from a Research Workshop.* (s.

1–18). Information Reference Center (ERIC/IRC),. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED120027.pdf

Mack, N. K. (1993). Learning Rational Numbers With Understanding: The Case of Informal Knowledge. I T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Red.), *Rational Numbers* (0 utg., s. 96–116). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203052624-11

Maskiewicz, A. C., & Lineback, J. E. (2013). Misconceptions Are "So Yesterday!". *CBE—Life Sciences Education*, *12*(3), 352–356. https://doi.org/10.1187/cbe.13-01-0014

Matematikksenteret. (u.å.). *Konkretiseringsmateriell*. Matematikksenteret. Hentet 1. februar 2022, fra https://www.matematikksenteret.no/l%C3%A6ringsressurser/videreg%C3%A5ende/konkretiseringsmateriell

Matematikksenteret. (2019e). *Andre problemer knyttet til brøk*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/andre-problemer-knyttet-til-br%C3%B8k

Matematikksenteret. (2019d). *Andre problemer knyttet til Tall*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/andre-problemer-knyttet-til-tall

Matematikksenteret. (2019c). *Brøkstrek er lik desimalkomma*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/br%C3%B8kstrek-er-lik-desimalkomma

Matematikksenteret. (2019h). *Differensen mellom teller og nevner avgjør størrelsen til brøken*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/differensen-mellom-teller-og-nevner-avgj%C3%B8r

Matematikksenteret. (2019j). *Fra misoppfatning til mestring*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/fra-misoppfatning-til-mestring

Matematikksenteret. (2019a). *Hva er en misoppfatning?* Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/hva-er-en-misoppfatning

Matematikksenteret. (2019g). *Jo større nevner (eller teller), jo større brøk*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/jo-st%C3%B8rre-nevner-eller-teller-jo-st%C3%B8rre-br%C3%B8k

Matematikksenteret. (2019f). *Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/teller-nevner-eller-prosent-er-et-isolert

Matematikksenteret. (2019b). *Vanlige misoppfatninger knyttet til Brøk og prosent*. Matematikksenteret. https://www.matematikksenteret.no/kartlegging-i-matematikk/misoppfatninger-i-matematikk/vanlige-misoppfatninger-knyttet-til-br%C3%B8k-og

McIntosh, A. (2007). *Alle teller! Håndbok for lærere som underviser i matematikk i grunnskolen: Kartleggingstester og veiledning om misoppfatninger og misforståelser på området tall og tallforståelse* (I. M. Stedøy-Johansen & M. R. Settemsdal, Overs.). Matematikksenteret.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Why Won't You Change Your Mind? Knowledge of Operational Patterns Hinders Learning and Performance on Equations. *Child Development*, *76*(4), 883–899. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2005.00884.x

Mitchell, A. (2005). Measuring fractions. I P. C. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Red.), *Building connections: Research, theory and practice.* (s. 545–552). MERGA. https://merga.net.au/Public/Publications/Annual_Conference_Proceedings/2005_MERGA_CP.aspx

Mitchell, A., & Horne, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? I L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Red.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 414–421). Mathematics Education Research Group of Australasia. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED520918.pdf

Mononen, R. (2019). *Telleferdigheter* (T. Throndsen, Overs.). iSeeNumbers. https://no.iseenumbers123.com/counting-skills

Moskal, B. M., & Magone, M. E. (2000). *Making Sense of What Students Know: Examining the Referents, Relationships and Modes Students Displayed in Response to a Decimal Task*. 24.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122. https://doi.org/10.2307/749607

Muijs, D. (2011). *Doing quantitative research in education with SPSS* (2nd ed). Sage Publications.

Neagoy, M. (2017). *Unpacking fractions: Classroom-tested strategies to build students' mathematical understanding*. ASCD. http://www.daneshnamehicsa.ir/userfiles/files/1/13-

%20Unpacking%20Fractions_%20Classroom-Tested%20Strategies%20to%20Build%20Students%20Mathematical%20Understanding%20(2017,%20ASCD).pdf

Neidorf, T., Arora, A., Erberber, E., Tsokodayi, Y., & Mai, T. (2020). *Student Misconceptions and Errors in Physics and Mathematics: Exploring Data from TIMSS and TIMSS Advanced* (Bd. 9). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-30188-0

NESH. (2021). *Forskningsetiske retningslinjer for samfunnsvitenskap, humaniora, juss og teologi*. Forskningsetikk. https://www.forskningsetikk.no/retningslinjer/hum-sam/forskningsetiske-retningslinjer-for-samfunnsvitenskap-humaniora-juss-og-teologi/

Newton, D. P. (2012). *Teaching for understanding: What it is and how to do it* (2nd ed). Routledge. https://ebookcentral.proquest.com/lib/hivolda-ebooks/reader.action?docID=958444

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Nilsen, T., & Kaarstein, H. (2021). *Med blikket mot naturfag: Nye analyser av TIMSS 2019-data og trender 2015-2019* (1. utg.). Universitetsforlaget. https://doi.org/10.18261/9788215045108-2021

NMAP. (2008). Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. *US Department of Education*. https://eric.ed.gov/?id=ED500486

OECD (Red.). (1999). *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment*. Organisation for Economic Co-operation and Development.

Olivier, A. (1989). Handling pupils' misconceptions. *Pythagoras*, *21*, 9–19.

Opsvik, F., & Skorpen, L. B. (2012). *SPEED- prosjektet: Kartlegging i matematikk på mellomtrinnet*.

Opsvik, F., & Skorpen, L. B. (2017). Utvikling av kartleggingsprøver i matematikk. I P. Haug, *Spesialundervisning innhald og funksjon* (s. 256–271). Samlaget.

Pallant, J. (2020). *SPSS survival manual: A step by step guide to data analysis using IBM SPSS* (7th edition). Open University Press.

Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 61–83. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9338-x

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. I I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Red.), *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (s. 430–437). Mathematics Education

Research Group of Australasia. https://www.researchgate.net/publication/236661411_Why_you_have_to_probe_to_discoverwhat_Year_8_students_really_think_about_fractions

Petit, M. M., Laird, R. E., & Marsden, E. L. (2010). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom*. Routledge.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence in children* (M. Cook, Overs.). International Universities Press. https://sites.pitt.edu/~strauss/origins_r.pdf

Piaget, J. (1970). *Science of education and the psychology of the child* (D. Coltman, Overs.). Orion Press.

Rushton, N. (2014). Common errors in Mathematics. *Research Matters*, *17*, 8–17. https://doi.org/10.1787/9789264096660-en

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions*. Open University Press. https://books.google.no/books?id=eaDW4zrQ154C&pg=PA13&hl=no&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false

Sadler, P. M., & Sonnert, G. (2016). Understanding Misconceptions: Teaching and Learning in Middle School Physical Science. *American Educator*, *40*(1), 26–32.

Sale, J. E. M., Lohfeld, L. H., & Brazil, K. (2002). Revisiting the quantitative-qualitative debate: Implications for mixed-methods research. *Quality and Quantity*, *36*(1), 43–53. https://doi.org/10.1023/A:1014301607592

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691–697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296. https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 16. https://doi.org/10.4324/9780203396391-18

Skott, J. (2019). Understanding mathematics teaching and learning "in their full complexity". *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*(5), 427–431. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09446-z

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparisons: The role in development of number sense and computational estimation. I J. Hiebert & M. J. Behr (Red.), *Number* *concepts and operations in the middle grades* (s. 182–197). Lawrence Erlbaum Associates ; National Council of Teachers of Mathematics.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.015

Stein, M., Larrabee, T. G., & Barman, C. R. (2008). A study of common beliefs and misconceptions in physical science. *Journal of Elementary Science Education*, *20*(2), 1–11. https://doi.org/10.1007/BF03173666

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? – An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 133–162. https://doi.org/10.1007/s10649-006-5892-z

Svartdal, F. (2019). *Korrelasjon – Psykologi*. Store norske leksikon. https://snl.no/korrelasjon_-_psykologi

Svingen, O. E. L. (2018). *Representasjoner i matematikk*. 12.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. I P. Gates & M. Swan (Red.), *Issues in mathematics teaching* (s. 147–165). Routledge/Falmer.

Tendere, J., & Mutambara, L. H. N. (2020). An Analysis of Errors and Misconceptions in the Study of Quadratic Equations. *European Journal of Mathematics and Science Education*, *1*(2), 81–90. https://doi.org/10.12973/ejmse.1.2.81

Throndsen, I., & Alseth, B. (2012). Kartleggingsprøver på barnetrinnet—Prøvenes formål og prinsipper for prøveutvikling. I T. N. Hopfenbeck, R. V. Olsen, & M. Kjærnsli (Red.), *Kvalitet i norsk skole: Internasjonale og nasjonale undersøkelser av læringsutbytte og undervisning* (s. 187–199). Universitetsforlaget.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction*, *37*, 5–13. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.002

Tsai, T.-L., & Li, H.-C. (2017). Towards a framework for developing students' fraction proficiency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 244–255. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1238520

Utdanningsdirektoratet. (2020). *Kompetansemål etter 5. Trinn—Læreplan i matematikk 1.–10. Trinn (MAT01-05)*. https://www.udir.no/lk20/mat01-05/kompetansemaal-og-vurdering/kv19

Utdanningsdirektoratet. (2021). *Eksempeloppgaver og tidligere nasjonale prøver. Bokmål—Regning, 5. Trinn*. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/prover/eksempeloppgaver-tidligere-nasjonale-prover/5.-trinn/regning/bokmal/

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The Equal Sign: Teachers' Knowledge and Students' Misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *21*(2), 136–147. https://doi.org/10.1080/18117295.2017.1321343

Vinje, B. (2019). *Misoppfatninger tilknyttet brøk på mellomtrinnet: En kvantitativ studie av elever på mellomtrinnet sine misoppfatninger tilknyttet brøk* [Masteroppgave, NTNU]. ntnuopen.ntnu.no. https://ntnuopen.ntnu.no/ntnu-xmlui/bitstream/handle/11250/2610385/no.ntnu%3Ainspera%3A2286589.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (M. Cole, Red.; Nachdr.). Harvard Univ. Press. http://ouleft.org/wp-content/uploads/Vygotsky-Mind-in-Society.pdf

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Learning progression toward a measurement concept of fractions. *International Journal of STEM Education*, *5*(27), 1–11. https://doi.org/10.1186/s40594-018-0119-2

Vedlegg

Vedlegg 1. Studiens oppgavesett

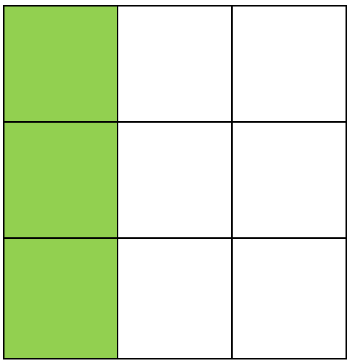
Oppgavesett – Brøk

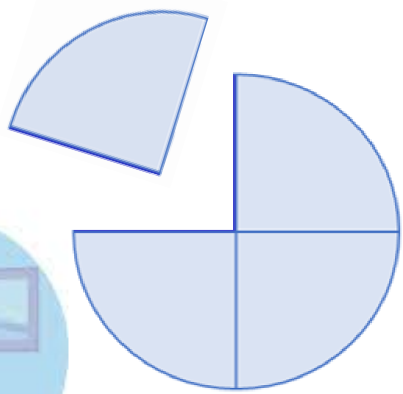
☐ Gutt

Elevkode: ________________

☐ Jente

Skolekode: ________________





- Les oppgaveteksten nøye.
- Svar så godt du kan på alle oppgavene. Om du er usikker på hva du skal svare, så er det supert om du prøver å svare likevel.
- Forklar eller vis svaret ditt i de oppgavene der du får beskjed om det.

Oppgave 1

Hvilken brøk er størst? Sett sirkel rundt svaret og forklar.

$\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{5}$

Forklar svaret ditt her:

Oppgave 2

Hvilken brøk har samme verdi som $\frac{3}{5}$?

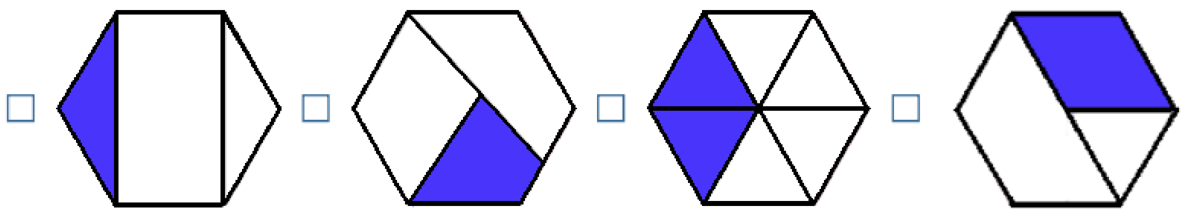
◯ $\frac{6}{10}$

◯ $\frac{2}{4}$

◯ $\frac{5}{3}$

Oppgave 3

Sett kryss foran den eller de figurene der $\frac{1}{3}$ er blå.



Oppgave 4

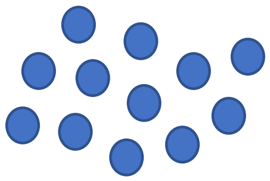
Hvilket tall har samme verdi som $\frac{3}{5}$?

- ◯ 3,5
- ◯ 0,6
- ◯ 0,2

Forklar svaret ditt her:

Oppgave 5

Sett ring rundt $\frac{1}{4}$ av prikkene.



Oppgave 6

Hvilket tall skal stå i den tomme ruten? Forklar svaret ditt

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\square}$$

Forklar svaret ditt her:

Oppgave 7

Hvor stor brøkdel av flagget til Costa Rica er rødt?

Svar: $\frac{\square}{\square}$

Oppgave 8

Sorter brøkene ut fra verdi.

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{3}$$

______ ______ ______ ______ ______

Minst Størst

Oppgave 9

Hvilken brøk har samme verdi som 0,23?

- ◯ $\frac{0}{23}$
- ◯ $\frac{1}{4}$
- ◯ $\frac{23}{100}$
- ◯ $\frac{2}{3}$

Oppgave 10

Fargelegg $\frac{1}{3}$ av rutene.

Oppgave 11

Hvilken brøk har dobbel så stor verdi som $\frac{1}{3}$?

- ◯ $\frac{1}{6}$
- ◯ $\frac{2}{3}$
- ◯ $\frac{2}{6}$

Oppgave 12

Lag en figur der $\frac{1}{5}$ er fargelagt.

Her kan du lage figuren:

Oppgave 13

Sett ring rundt de påstandene som er sanne om brøken $\frac{2}{5}$:

A: Den er større enn $\frac{1}{2}$

B: Den er lik 2,5

C: Den er lik 0,4

D: Den er større enn $\frac{1}{3}$

Oppgave 14

Skriv $\frac{2}{3}$ som desimaltall

Svar her:

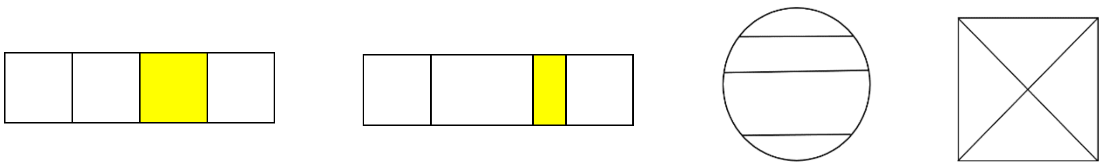
Oppgave 15

Hvilket tall skal stå i den tomme ruten?

$$\frac{2}{3} = \frac{\boxed{}}{15}$$

Oppgave 16

Sett en sirkel rundt den eller de formene som representerer $\frac{1}{4}$ og forklar svaret ditt.



Forklar svaret ditt her:

Oppgave 17

Hvilken brøk har verdi mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$?

- ◯ $\frac{1}{3}$
- ◯ $\frac{2}{2}$
- ◯ $\frac{3}{5}$
- ◯ Det er umulig å lage en brøk med verdi mellom $\frac{1}{2}$ og $\frac{2}{3}$

Oppgave 18

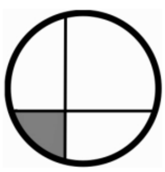
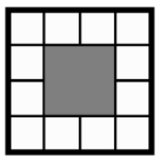
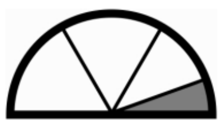
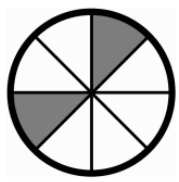
Hanna er på fjelltur med far. Hun spør om de har igjen $\frac{1}{4}$ av turen. Far sier de har igjen mindre enn det.

Hvor langt kan de ha igjen av turen?

- ◯ $\frac{1}{5}$
- ◯ $\frac{1}{3}$
- ◯ $\frac{1}{2}$

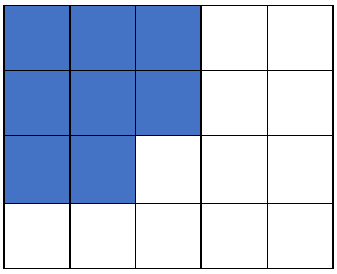
Oppgave 19

Sett kryss foran den eller de figurene der $\frac{1}{4}$ er fargelagt grå.

☐  ☐  ☐  ☐ 

Oppgave 20

Hvor stor del av hele figuren er farget blå?



- ◯ 8,12
- ◯ 8,20
- ◯ 0,4
- ◯ 0,8

Vedlegg 2. Kodeoversikt

Kodeoversikt for oppgavesett i SPSS

SPSS navn: Kjønn

Variabel: Kjønn

Kode instruksjoner:

1 – Gutt

2 – Jente

Måleskala: Nominal

SPSS navn: Skole

Variabel: Skoleidentifikasjon

Id fra 100-500

Type: Tekstvariabel

Måleskala: Scale

SPSS navn: ID

Variabel: identifikasjonsnummer

Kode instruksjoner: Nummer gitt til hvert oppgavesett

Måleskala: Scale

Generelle koder:

Blank rute – Ubesvart

Koder for oppgavene (variablene):

Oppgave	SPSS navn	Label (forklarende tekst)	Type	Kode instruksjoner/ Values	Måleskala
1	JNJB_1	Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
8	JNJB_2	Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	Tallvariabel	0 – Feil rekkefølge 1 – Riktig rekkefølge	Scale

11	JNJB_3	Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
13 (a og d)	JNJB_4_A	Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
18	JNJB_5	Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
2	DTNS_1	Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
6	DTNS_2	Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
15	DTNS_3	Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
17	DTNS_4	Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
3	NDUS_1	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	Tallvariabel	0 – Feil svar 0,5 – Et riktig svar 1 – To riktige svar	Scale
7	NDUS_2	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
12	NDUS_3	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	Tallvariabel	0 – Figur, ikke like deler 1 – Figur, like deler	Scale
16	NDUS_4	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale

19	NDUS_5	Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	Tallvariabel	0 – Feil svar 0,5 – Ett riktig svar 1 – To riktige svar	Scale
4	BLD_1	Brøkstrek er lik desimalkomma	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
9	BLD_2	Brøkstrek er lik desimalkomma	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
13 (b og c)	BLD_3	Brøkstrek er lik desimalkomma	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
14	BLD_4	Brøkstrek er lik desimalkomma	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
20	BLD_5	Brøkstrek er lik desimalkomma	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
5	TNIT_1	Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale
10	TNIT_2	Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall	Tallvariabel	0 – Feil skravert 1 – Riktig skravert	Scale
20	TNIT_3	Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall	Tallvariabel	0 – Feil svar 1 – Riktig svar	Scale

Vedlegg 3. Oppgavesettets valideringsskjema

Misoppfatning	
Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse	3, 7, 12, 16, 19
Jo større nevner (eller teller), jo større brøk	1, 8, 11, 13, 18
Brøkstrek er lik desimalkomma	4, 9, 13, 14, 20
Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken	2, 6, 15, 17
Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall	5, 10, 20

Valideringsskjema

Oppgave	Hva måler oppgaven?	Hentet fra
1	Måler hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her vil eleven se på verdien av nevneren isolert opp mot hverandre.	Alle Teller
2	Måler hvor vidt elevene ser på differensen mellom teller og nevner når de avgjør størrelsen på brøken.	Variasjon av oppgave i FRAMM
3	Måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen spille noen rolle. Her kan man også se om elevene ser at $\frac{1}{3}$ og $\frac{2}{6}$ er det samme.	Variasjon av oppgave i FRAMM
4	Måler hvor vidt elevene ser på brøkstreken som desimalkomma. Verdien av teller og nevner vil her være separate verdier.	Variasjon av oppgave i FRAMM
5	Måler hvor vidt eleven ser på teller eller nevner som et isolert tall. Her kan eleven for eksempel	Variasjon av oppgave i FRAMM

	sette ring rundt én prikk eller fire prikker, i stedet for tre.	
6	Måler hvor vidt elevene ser på differensen mellom teller og nevner. Dersom eleven har denne misoppfatningen, vil den svare 5.	Variasjon av oppgave i FRAMM
7	Måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen spille noen rolle. Svaret skal være $\frac{1}{3}$, men dersom eleven har en misoppfatning her vil de svare $\frac{1}{5}$ da flagget har fem deler.	FRAMM
8	Måler hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her vil eleven se på verdien av nevneren isolert opp mot hverandre.	Variasjon av oppgave i Alle Teller
9	Måler hvor vidt eleven ser på brøkstrek som desimalkomma. Her skal eleven gå motsatt vei.	Variasjon av oppgave i FRAMM
10	Måler hvor vidt eleven ser på teller eller nevner som et isolert tall. Her kan eleven for eksempel fargelegge én eller tre ruter, i stedet for seks.	Eksempeloppgave Nasjonale prøver
11	Måler hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her vil eleven se på verdien av nevneren isolert opp mot hverandre.	FRAMM
12	Måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her skal elevene lage figuren selv, og det blir interessant om størrelsen på delene spiller noen rolle. Går et steg videre fra ferdige figurer.	Variasjon av oppgave i FRAMM

13	Måler hvor vidt elevene ser på brøkstreken som komma, og om elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken.	Alle teller
14	Måler hvor vidt elevene ser på brøkstreken som komma. Verdien av teller og nevner vil her være separate verdier.	KIM/FRAMM
15	Måler hvor vidt elevene ser på differensen mellom teller og nevner. Dersom eleven har denne misoppfatningen, vil den svare 5.	Variasjon av oppgave i FRAMM
16	Måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen spille noen rolle. Her vil elevene kunne sette sirkel rundt alle. Om de er bevisst på at telleren er 1, vil de sette sirkel på de to første.	Pantziara & Philippou
17	Måler hvor vidt elevene ser på differensen mellom teller og nevner når de avgjør størrelsen på brøken.	FRAMM
18	Måler hvor vidt elevene ser på størrelsen på nevneren når de skal avgjøre størrelsen på brøken. Her vil eleven se på verdien av nevneren isolert opp mot hverandre.	FRAMM
19	Måler hvor vidt elevene bare ser på antall deler. Her vil ikke størrelsen spille noen rolle.	Clements et al.
20	Måler hvor vidt eleven ser på teller eller nevner som et isolert tall. Men ser også på om elevene ser på brøkstreken som komma. Alternativ 1 viser til teller og nevner som isolert tall, mens både alternativ 1 og alternativ 2 ser på brøkstreken som et desimalkomma.	Variasjon av oppgave i SPEED

Vedlegg 4. Intervjuguide

Intervjuguide –" Elevers forståelse av brøk"

Målet med intervjuet er å få en bedre forståelse for hva som ligger til grunn for din besvarelse på utvalgte oppgaver. Vi skal se på fem oppgaver sammen, hvor jeg kommer til å stille noen oppfølgingsspørsmål. Her er det flott om du beskriver hvordan du tenker, da jeg ønsker å lære av deg (Viktig å trygge eleven).
(Jeg starter med et enkelt spørsmål, for å få eleven i gang.)

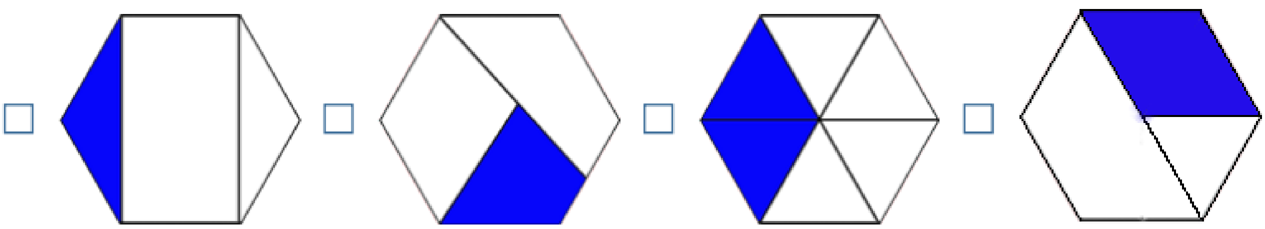
1. Når du hører ordet brøk, hva tenker du på da?

2. Nevner representerer antall deler, uavhengig av størrelse

<u>Mulige oppgaver:</u>

Oppgave 3

Sett kryss foran den eller de figurene der $\frac{1}{3}$ er fargelagt blå.



<u>Mulige spørsmål:</u>

- Hva betyr $\frac{1}{3}$?
- Hva betyr sifrene (tallene) i teller og nevner?
- Når du skal dele en figur i tre deler, hva er viktig å tenke på da? (størrelse på delene, antall deler). Alternative spørsmål.

3. Jo større nevner (eller teller), jo større brøk

Mulig oppgave:

Oppgave 8

Sorter brøkene ut fra verdi.

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{3}$$

______ ______ ______ ______ ______

Minst Størst

Mulige spørsmål:

- Hvordan sorterer du brøker etter størrelse?
- Hvorfor setter du ___ før ___? (avhengig av hva eleven svarer)

4. Brøkstrek er lik desimalkomma

Mulig oppgave:

Oppgave 14

Skriv $\frac{2}{3}$ som desimaltall

Mulige spørsmål:

- Hva betyr sifrene (tallene) i teller og nevner? (Hvordan henger brøk sammen med desimaltall? Mulig at vi må snakke rundt overgang mellom representasjonene)
- Hva betyr selv brøkstreken?

5. Differansen mellom teller og nevner avgjør størrelsen på brøken

Mulig oppgave:

Oppgave 6

Hvilket tall skal stå i den tomme ruten? Forklar svaret ditt

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\square}$$

Mulige spørsmål:

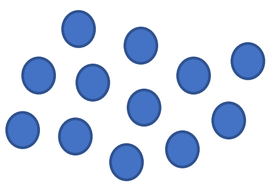
- Hvordan går du frem for å finne det tallet som mangler?
- Hva er det som avgjør om en brøk har samme verdi?

6. Teller (nevner) eller prosent er et isolert tall

Mulig oppgave:

Oppgave 5

Sett ring rundt $\frac{1}{4}$ av prikkene.



Mulige spørsmål:

- Hvordan går du frem for å løse oppgaven?
- Hva er viktig når man skal finne en del av en mengde? (mengde, helhet)
- Hva er viktig når man skal finne hvor mange prikker som utgjør $\frac{1}{4}$?

Vedlegg 5. Samtykkeskjema

Vil ditt barn delta i forskningsprosjektet

″ Elevers forståelse av brøk″?

Til foresatte for elever på 5. trinn ved ___________ skole.

Jeg er masterstudent ved grunnskolelærerutdanningen på Høgskulen i Volda. Jeg skal gjennomføre et lite forskningsprosjekt på skolen hvor ditt barn er elev, og dette er et spørsmål til deg om ditt barn kan delta i det forskningsprosjektet. I dette skrivet gir jeg deg informasjon om målene for prosjektet og hva deltakelse vil innebære for ditt barn.

Formål

Forskningen vil bli brukt i en masteroppgave ved Høgskulen i Volda. I denne masteroppgaven ønsker jeg å se nærmere på elevers forståelse av brøk. Fra egen erfaring og fra tidligere forskning, kan man se at brøkbegrepet er utfordrende for mange elever. Jeg har valgt å se på elever på 5. trinn, da det er på dette trinnet man skal ha fokus på brøkforståelsen ifølge læreplanen. Hvordan man forstår og oppfatter ny kunnskap er naturlig i en læringsprosess, da man tar med seg tidligere kunnskap inn i forståelsen av ny kunnskap.

Hvem er ansvarlig for forskningsprosjektet?

Høgskulen i Volda er ansvarlig for prosjektet.

Hvorfor får ditt barn spørsmål om å delta?

Jeg ønsker å utføre denne studien på elever på 5. trinn, da brøk er et stort tema på dette trinnet. Derfor er ditt barn blant de som blir spurt om å delta. Utvalget av elever vil være en blanding av elever fra både by og bygd, og små og store skoler. Det vil derfor være et bredt og variert utvalg.

Hva innebærer det for ditt barn å delta?

Dersom du velger å la ditt barn delta i prosjektet, innebærer det at barnet deltar i en test der de skal svare på et oppgavesett knyttet til brøk i løpet av en skoletime. Oppgavene kartlegger ulike forståelser knyttet til brøk. Jeg vil ikke samle inn noe som kan identifisere enkeltelever. De opplysningene som er av relevans er skole og kjønn, men elevene vil være anonyme. Selve testen vil gjennomføres på papir, og alle data som blir innsamlet vil bli lagret via Høgskulen i Volda med passordbeskyttelse.

Det vil være aktuelt å ha intervju med utvalgte elever. Derfor trenger jeg også et eget samtykke på at ditt barn kan bli intervjuet. Spørsmålene har til hensikt å få en dypere forståelse for hvorfor elevene svarer som de gjør. I intervjuene vil det ikke være nødvendig med personopplysninger utover opplysningene om skole og kjønn. Dersom det skulle være ønskelig, kan du som forelder/foresatt få se spørsmålene på forhånd ved å ta kontakt.

Det er frivillig å delta

Det er frivillig å delta i prosjektet, men jeg håper at alle vil delta for å få et bredt utvalg. Hvis du velger å la ditt barn delta, kan du eller barnet når som helst trekke samtykket tilbake uten å oppgi noen grunn. Alle personopplysninger om ditt barn vil da bli slettet. Det vil ikke ha noen negative konsekvenser for ditt barn hvis barnet ikke vil delta eller senere velger å trekke seg. Da denne testen vil utføres i skoletiden, vil de som ikke deltar få et tilbud om alternativt opplegg.

Ditt barns personvern – hvordan vi oppbevarer og bruker opplysningene

Vi vil bare bruke opplysningene om ditt barn til formålene vi har fortalt om i dette skrivet. Vi behandler opplysningene konfidensielt og i samsvar med personvernregelverket.

- *Stine-Mari Sjøholt og veileder Arve Fiskerstrand vil ha tilgang på datamaterialet. Datamaterialet vil kunne diskuteres anonymt med medstudenter.*
- *Eventuelle navn og kontaktopplysninger vil erstattes med en kode som lagres på egen liste adskilt fra øvrige data. Denne listen vil oppbevares innelåst.*

- *Alle filer med personopplysninger vil oppbevares i passordbeskyttede filer og mapper på en studentkonto, som er godkjent av Høgskulen i Volda.*
- *Deltakere vil ikke kunne gjenkjennes i publikasjonen da datamaterialet i hovedsak vil bestå av tall og statistikk. Intervjuene vil anonymiseres slik at man ikke kan gjenkjenne elevene som deltar.*

Hva skjer med opplysningene deres når vi avslutter forskningsprosjektet?

Opplysningene anonymiseres når prosjektet avsluttes og oppgaven er godkjent i juni 2022. Det vil dermed ikke være mulig å identifisere enkeltelever.

Hva gir oss rett til å behandle personopplysninger om ditt barn?

Vi behandler opplysninger om ditt barn basert på ditt samtykke.

På oppdrag fra Høgskulen i Volda har NSD – Norsk senter for forskningsdata AS vurdert at behandlingen av personopplysninger i dette prosjektet er i samsvar med personvernregelverket.

Deres rettigheter

Så lenge ditt barn kan identifiseres i datamaterialet, har du rett til:

- innsyn i hvilke opplysninger vi behandler om ditt barn, og å få utlevert en kopi av opplysningene
- å få rettet opplysninger om ditt barn som er feil eller misvisende
- å få slettet personopplysninger om ditt barn
- å sende klage til Datatilsynet om behandlingen av barnets personopplysninger

Hvis dere har spørsmål til studien, eller ønsker å vite mer om eller benytte dere av deres rettigheter, ta kontakt med:

- *Høgskulen i Volda* ved *Arve Fiskerstrand (*Arve.Fiskerstrand@hivolda.no)
- Vårt personvernombud: *Cecilie Røeggen (*personvernombod@hivolda.no)

Hvis du har spørsmål knyttet til NSD sin vurdering av prosjektet, kan du ta kontakt med:

- NSD – Norsk senter for forskningsdata AS på epost (personverntjenester@nsd.no) eller på telefon: 55 58 21 17.

Med vennlig hilsen

Arve Fiskerstrand, Veileder

Stine-Mari Sjøholt, Student

Samtykkeerklæring

Jeg har mottatt og forstått informasjon om prosjektet *Elevers forståelse av brøk*, og har fått anledning til å stille spørsmål.

Jeg samtykker til at …………………………….…… (elevens navn):

- ☐ Svarer på oppgavesettet
- ☐ Deltar i eventuelle elevintervju

Jeg samtykker til at opplysninger om mitt barn behandles frem til prosjektet er avsluttet i juni 2022

(Signert av foreldre/foresatte, dato)

Vedlegg 6. NSD-Godkjenning

NORSK SENTER FOR FORSKNINGSDATA

Vurdering

Referansenummer

619203

Prosjekttittel

Elevers forståelse av brøk

Behandlingsansvarlig institusjon

Høgskulen i Volda / Avdeling for humanistiske fag og lærarutdanning / Institutt for realfag

Prosjektansvarlig (vitenskapelig ansatt/veileder eller stipendiat)

Arve Fiskerstrand, Arve.Fiskerstrand@hivolda.no, tlf: 70075434

Type prosjekt

Studentprosjekt, masterstudium

Kontaktinformasjon, student

Stine-Mari Sjøholt, stinemas@stud.hivolda.no, tlf: 94785101

Prosjektperiode

01.01.2022 - 30.06.2022

Vurdering (1)

17.12.2021 - Vurdert

Det er vår vurdering at behandlingen av personopplysninger i prosjektet vil være i samsvar med personvernlovgivningen så fremt den gjennomføres i tråd med det som er dokumentert i meldeskjemaet 17.12.2021 med vedlegg, samt i meldingsdialogen mellom innmelder og NSD. Behandlingen kan starte.

TYPE OPPLYSNINGER OG VARIGHET
Prosjektet vil behandle alminnelige personopplysninger frem til 30.06.2022.

LOVLIG GRUNNLAG
Prosjektet vil innhente samtykke fra de foresatte til behandlingen av personopplysninger om barna. Vår vurdering er at prosjektet legger opp til et samtykke i samsvar med kravene i art. 4 og 7, ved at det er en frivillig, spesifikk, informert og utvetydig bekreftelse som kan dokumenteres, og som den registrerte/foresatte kan trekke tilbake.

Lovlig grunnlag for behandlingen vil dermed være de foresattes samtykke, jf. personvernforordningen art. 6 nr. 1 bokstav a.

PERSONVERNPRINSIPPER
NSD vurderer at den planlagte behandlingen av personopplysninger vil følge prinsippene i

personvernforordningen om:

• lovlighet, rettferdighet og åpenhet (art. 5.1 a), ved at foresatte får tilfredsstillende informasjon om og samtykker til behandlingen
• formålsbegrensning (art. 5.1 b), ved at personopplysninger samles inn for spesifikke, uttrykkelig angitte og berettigede formål, og ikke viderebehandles til nye uforenlige formål
• dataminimering (art. 5.1 c), ved at det kun behandles opplysninger som er adekvate, relevante og nødvendige for formålet med prosjektet
• lagringsbegrensning (art. 5.1 e), ved at personopplysningene ikke lagres lengre enn nødvendig for å oppfylle formålet

DE REGISTRERTES RETTIGHETER
NSD vurderer at informasjonen om behandlingen som de registrerte og deres foresatte vil motta oppfyller lovens krav til form og innhold, jf. art. 12.1 og art. 13.

Så lenge de registrerte kan identifiseres i datamaterialet vil de ha følgende rettigheter: innsyn (art. 15), retting (art. 16), sletting (art. 17), begrensning (art. 18) og dataportabilitet (art. 20).

Vi minner om at hvis en registrert/foresatt tar kontakt om sine/barnets rettigheter, har behandlingsansvarlig institusjon plikt til å svare innen en måned.

FØLG DIN INSTITUSJONS RETNINGSLINJER
NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene i personvernforordningen om riktighet (art. 5.1 d), integritet og konfidensialitet (art. 5.1. f) og sikkerhet (art. 32).

Nettskjema er databehandler i prosjektet. NSD legger til grunn at behandlingen oppfyller kravene til bruk av databehandler, jf. art 28 og 29.

For å forsikre dere om at kravene oppfylles, må dere følge interne retningslinjer og eventuelt rådføre dere

MELD VESENTLIGE ENDRINGER
Dersom det skjer vesentlige endringer i behandlingen av personopplysninger, kan det være nødvendig å melde dette til NSD ved å oppdatere meldeskjemaet. Før du melder inn en endring, oppfordrer vi deg til å lese om hvilke type endringer det er nødvendig å melde: https://www.nsd.no/personverntjenester/fylle-ut-meldeskjema-for-personopplysninger/melde-endringer-i-meldeskjema. Du må vente på svar fra NSD før endringen gjennomføres.

OPPFØLGING AV PROSJEKTET
NSD vil følge opp ved planlagt avslutning for å avklare om behandlingen av personopplysningene er avsluttet.

Kontaktperson hos NSD: Sturla Herfindal

Lykke til med prosjektet!