

# Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga

Ingeborg Katrin Lid Berget og Oda Heidi Bolstad

## SAMANDRAG

Det er for tida fokus på at matematisk kompetanse er viktig for å fungere i det moderne samfunnslivet. Arbeid med matematisk modellering er ein måte å kople matematikk til dagleglivet på. I denne artikkelen tek me føre oss grunnar til å arbeide med modelleringsaktivitetar og knyter dette til ulike perspektiv på matematisk modellering. Med dette som bakgrunn har me gjort ein innhaldsstudie av matematikk fellesfag i Læreplanverket for Kunnskapsløftet og høyringsutkastet for fagfornyinga av læreplanar i Kunnskapsløftet. Denne studien viser at ordet *modellering* er brukt fleire gonger i høyringsutkastet for fagfornyinga enn i Læreplanverket for Kunnskapsløftet, og at bruken er knytt til ulike modelleringsperspektiv. Dette kan tyde på eit auka fokus på matematisk modellering i den nye læreplanen. Likevel er ikkje læreplanen tydeleg på korleis ein skal forstå og arbeide med matematisk modellering. Dette kan skape utfordringar for lærarar som skal undervise modellering i skulen.

**Nøkkelord:** *matematikkundervisning, matematisk modellering, læreplan, fagfornyinga*

Ingeborg Katrin Lid Berget, Høgskulen i Volda. E-post: [bergeti@hivolda.no](mailto:bergeti@hivolda.no)

Oda Heidi Bolstad, Høgskulen på Vestlandet, E-post: [bolstado@hivolda.no](mailto:bolstado@hivolda.no)

## ABSTRACT

### Mathematical modelling perspectives in Norwegian curricula

Currently, there is a focus on the importance of mathematical competence in order to function in modern society. Working with mathematical modelling is a way to connect mathematics with everyday life. In this article, we provide reasons for working with modelling activities and connect them to different perspectives of mathematical modelling. Within this framework, we have done a content analysis of the common core subject mathematics in the current curriculum (the Knowledge Promotion Reform 2006) and the consultation draft of the renewal of the curriculum, which take effect in 2020. This study shows an increase in the frequency of the word *modelling* in the renewal of the curriculum compared to the Knowledge Promotion Reform. This may indicate an increased focus on mathematical

modelling. However, the renewal of the curriculum is not explicit in how mathematical modelling should be understood and worked with. This may cause challenges for the teachers in teaching modelling in school.

**Keywords:** *mathematics education, mathematical modelling, curriculum, curriculum renewal*

## Introduksjon

I Opplæringslova (1998) § 1-1 heiter det at opplæringa mellom anna skal gi elevane kunnskap, dugleik og haldningar for å kunne meistre liva sine og delta i arbeid og fellesskap i samfunnet. I tillegg skal elevane få utfalde skaparglede, engasjement, utforskartrøng samt lære seg å tenkje kritisk.

I skrivande stund er det endelege utkastet til fagfornyinga av læreplanar i Kunnskapsløftet (LK20) under utarbeiding av læreplangruppa. Bakgrunnen for fagfornyinga er mellom anna at det elevane lærer skal vere relevant for å kunne henge med i den raske utviklinga som skjer i samfunnsliv, arbeidsliv og innan teknologi. I denne samanhengen blir kritisk tenking, refleksjon, utforsking og kreativitet trekt fram som viktig (Utdanningsdirektoratet, 2018). I matematikkfaget kan arbeid med matematisk modellering bidra til å utvikle desse kompetansane.

Matematisk modellering har dei siste tiåra fått større plass i læreplanen i fleire land (Blum & Pollak, 2018), også i Noreg (Erfjord, 2005). Å jobbe med modellering kan kople matematikkfaget til ikkje-matematiske situasjonar, slik at elevane tydelegare ser den praktiske nytten av å kunne matematikk. Dei får også øve opp evna til å vere kritiske til svar ein får frå matematiske modellar, og får trening i å kommunisere i og med matematikk (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003). Niss (1990) viser til at matematikken er viktig i kultur og samfunn, men at denne matematikken ofte er usynleg eller skjult. «Det er væsentlig for en demokratisk utvikling af samfundet, at almindelige mennesker er i stand til at omgås matematik aktivt og analyserende» (Niss, 1990, s. 67). Det er viktig, både for samfunn og individ at me kan identifisere og bruke matematikk i kvardagen.

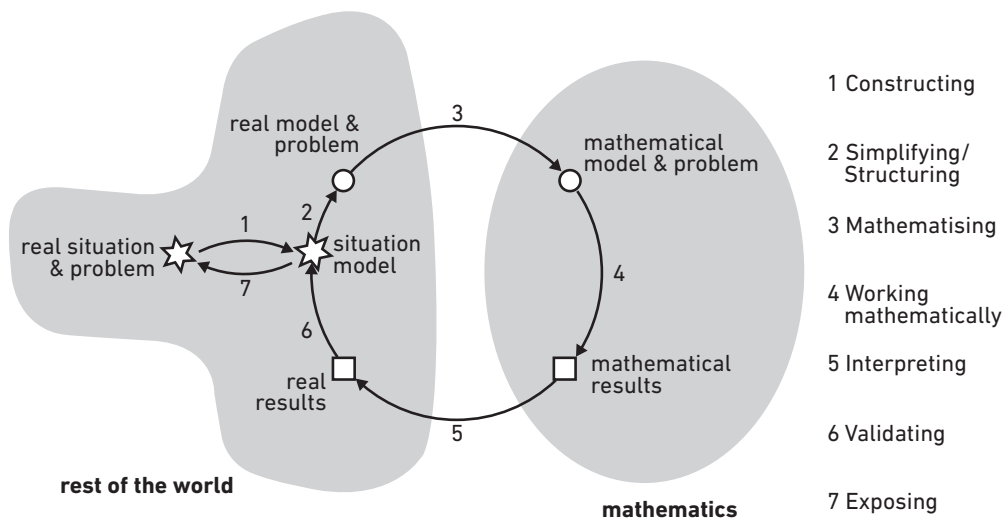
I neste del av artikkelen går me grundigare inn på kva matematisk modellering er. Me tek føre oss grunnar for og perspektiv på arbeid med matematisk modellering. Dette nyttar me vidare til å sjå nærare på bruken av modelleringsomgrepet i Læreplanverket for Kunnskapsløftet (LK06) og i LK20. Føremålet er å kunne seie noko om korleis forståinga av modellering kjem til uttrykk i dei to læreplanane, og om vektlegginga av modellering i læreplanane. Forskingsspørsmåla er formulerte slik:

- Kor ofte er ordet modell brukt i LK06 og LK20?
- Korleis og i kva samanhengar blir modell skildra i LK06 og LK20?

Når me skriv ordet modell, omfattar det også andre former av ordet, som til dømes modellere, modellering og modellar.

## Matematisk modellering

Omgrepet matematisk modellering er ikkje eintydig definert innanfor matematikkdidaktikk (Kaiser & Sriraman, 2006), og omfattar mange ulike klasseromspraksisar (Jablonka & Gellert, 2010). I forskningslitteraturen er likevel modelleringskompetanse definert som å kunne utføre alle delar av modelleringsprosessen, og å kritisk vurdere det andre har gjort (sjå til dømes Blomhøj og Højgaard Jensen, 2003, og Borromeo Ferri, 2018). Denne modelleringsprosessen er gjerne skildra ved hjelp ein figur, til dømes slik som i Figur 1.



**Figur 1:** Modelleringsprosessen (Blum & Leiß, 2007).

Denne figuren med 7 steg, legg vekt på overgangane mellom matematikk og resten av verda, og motsett, ved at det er skilje mellom «mathematics» og «the rest of the world». Dei fyrste to stega er å forstå problemet, og deretter forenkle og avgjere kva ein vil ta omsyn til. Om me tenkjer oss eit konkret døme der ein skal velje telefonabonnement, vil dette vere å identifisere forbruk, til dømes den einskilde si bruk av ringetid og datatrafikk. I tillegg må ein innhente informasjon om ulike telefona-bonnement. I det tredje steget matematiserer ein problemet ved å bruke matema-tisk språk og lage ein matematisk modell. I dømet med telefonabonnement inneber dette å setje opp prisen som ein funksjon av datatrafikk og ringetid for dei ulike abonnementa. Deretter, i steg fire og fem, finn ein ei matematisk løysing som må tolkast tilbake til situasjonen. Her kan ein til dømes lese av grafane til dei ulike funksjonane og finne det billegaste abonnementet som stettar din bruk. I steg seks vurdere om løysinga er tilfredsstillande, eller om ein må gjere endringar i dei føre-gåande stega, til dømes når det gjeld forbruk. I steg sju må ein forklare løysinga på problemet ved å peike på føresetnadane ein har gått ut i frå. Dette for at andre skal kunne forstå og vurdere modellen. Dette fordi føresetnader som forbruk vil variere, og det abonnementet som er billegast for ein person treng ikkje vere det for ein annan.

Utgangspunktet for modelleringsprosessen er ein reell situasjon eller eit problem frå den verkelege verda. Modellering handlar altså om å bruke matematikk for å løyse eit problem. Grunnen til at det ofte er framstilt som ein syklisk prosess er at ein heile tida må vurdere og validere resultatene ein kjem fram til, og kanskje justere modellen ein har brukt. Ein går altså sjeldan gjennom modelleringscyklusen steg for steg frå 1 til 7 når ein løyser eit problem.

Matematisk modellering handlar om å bruke matematikk til å løyse verkelege problem. Ein kan såleis sjå på matematikk som eit verktøy til å betre forstå og meistre kvardagssituasjonar no og i framtida. Matematikk kan vere eit verktøy for å utvikle generell matematisk kompetanse, men er også ein viktig del av kultur og samfunn, og har verdi i seg sjølv (Niss, 1990). Desse ulike syna på matematikk kjem også fram i føremålet i læreplanen LK06:

Mennesket har til alle tider brukt og utvikla matematikk for å systematisere erfaringar, for å beskrive og forstå samanhengar i naturen og i samfunnet og for å utforske universet. Ei anna inspirasjonskjelde til utviklinga av faget har vore glede hos menneske over arbeid med matematikk i seg sjølv. (Utdanningsdirektoratet, 2013)

I fylgje læreplanen har altså matematikk både praktisk nytte, men er også viktig i seg sjølv. Grunnar til å innføre matematisk modellering i læreplanar og undervising vil variere ut frå kva syn ein har på matematikk. Blum (2015, s. 81) presenterer fire ulike grunnar:

- Pragmatisk: For å kunne forstå og meistre kvardagssituasjonar, må elevane lære å omforme problem til matematikk. Dei vil ikkje kunne klare dette av seg sjølve om dei berre jobbar med matematikk utan å knyte det til kvardagssituasjonar.
- Formativ: For å kunne utvikle ulike kompetansar innanfor matematikk. Sjølv sagt modelleringskompetanse, og også til dømes argumentasjonskompetanse.
- Kulturell: Ein må sjå bruk av matematikk i samfunnet for å få eit bilete av kva matematikk som vitskap er.
- Psykologisk: Døme frå kvardagslivet kan bidra til at elevane blir interesserte i matematikk. Ein kan ved hjelp av modellering motivere eller strukturere matematisk innhald slik at elevane kan forstå det på ein betre måte.

Alle desse fire grunnane for å arbeide med modellering viser ein samheng mellom matematikk og kvardagsliv. I modelleringsprosessen tek ein utgangspunkt i ein kvardagssituasjon, omformar denne til eit matematisk problem, løyser og tolkar den tilbake til situasjonen, slik som Figur 1 viser. Sjølv om prosessen kan sjå nokså lik ut, kan grunngevinga for å jobbe med modellering vere ulik. Ein kan også sjå på desse grunnane som ulike mål for undervising av modellering (Blum, 2015).

Andre har sett på ulike perspektiv på modellering nettopp ut i frå målet med aktiviteten. Ein nyttar gjerne ei tredeling der ein ser på *modellering som innhald*,

*modellering som fartøy og modellering som kritikk* (Barbosa, 2006; Hana, 2013; Julie, 2002). Modellering som innhald er når målet er modelleringa i seg sjølv. Målet er å utvikle modelleringskompetanse, altså å kunne løyse problem som i utgangspunktet ikkje er matematiske, ved hjelp av matematikk. Ein viktig del av modelleringsprosessen er koplinga frå kvardagslivet til matematikk, og å tolke den matematiske løysinga tilbake til konteksten. Dette svarer til dei to fyrste grunnane til Blum (2015), pragmatisk og formativ; å kunne bruke matematikk i kvardagslivet, og utvikle matematisk kompetanse. Målet med modellering som innhald er å utvikle modelleringskompetanse for å kunne bruke matematikk som ein reiskap i kvardagslivet. Dette perspektivet på modellering er tett knytt til Figur 1.

Modellering som fartøy er når modelleringsprosessen blir brukt med hovudmål om å lære noko anna enn modellering i seg sjølv. Det kan til dømes vere å få erfaringar innanfor eit matematisk tema, eller å utvikle omgrepsstrukturar mellom ulike matematiske område. Galbraith (2012) lyftar fram mangfaldet innanfor perspektivet modellering som fartøy. Det kan famne om matematikk i ein kvardagskontekst med mål om å motivere elevar, eller å gå frå ein konkret situasjon til eit generelt algebraisk uttrykk for å jobbe med abstraksjon. Dette er knytt til den psykologiske grunngevinga til Blum (2015), om å motivere elevar og hjelpe dei til å strukturere og forstå matematisk innhald.

Innanfor perspektivet modellering som fartøy kan ein også i følge Galbraith (2012) plassere «emergent modellering», som er sentralt innan Realistic Mathematics Education (RME). Eitt døme på dette kan vere å teikne ein figur (eller modell) til ei prosentoppgåve, eller lage ein geometrisk modell av ei algebraisk oppgåve. Her matematiserer ein altså ikkje ein kvardagssituasjon, men flyttar seg mellom ulike matematiske område, eller representerer problem på ein ny måte. I denne forståinga av modellering som fartøy er ikkje modellering direkte knytt til kvardagsmatematikk, men ein utviklar den matematiske kompetansen ved å bygge bruar mellom ulike representasjonar. Dette perspektivet er difor ikkje så tydeleg knytt til modelleringsprosessen slik han er utforma i Figur 1. Situasjonen ein går ut i frå kan allereie vere uttrykt matematisk, men ein skal representere denne situasjonen på ein annan måte. Målet er å lære, og å få betre forståing av matematikk. Det kan også knytast til den psykologiske grunngevinga for modellering, der ein bruker modellering for å motivere til matematisk læring.

Innanfor modellering som fartøy nemner Galbraith (2012) i tillegg modellering som kurvetilpassing, det at ein nyttar regresjon til å lage ein funksjon ut frå gitte verdiar. Her blir funksjonen kalla ein matematisk modell av situasjonen. Ei slik oppgåve kan vere uttrykt i ein kvardagskontekst, men forenklingar og framgangsmåte kan vere gitt, slik at ein ikkje treng å matematisere situasjonen for å kunne løyse oppgåva. Her ser ein også at berre delar av modelleringsprosessen i Figur 1 blir nytta. Galbraith ser dette som ei avgrensa forståing av modellering, medan Borromeo Ferri (2018) meiner at å utføre regresjon ut i frå oppstilte verdiar ikkje er modellering dersom ein ikkje sjølv må forenkla og gjere avgrensingar for å kome fram til modellen. Det vil seie at dersom tala og framgangsmåten er gitt i ei matematikkoppgåve, er det i fylgje Borromeo Ferri (2018) ikkje ei modelleringsoppgåve.

Modellering som kritikk er når ein vurderer modellar ein møter i samfunnet. Dette er ein viktig del av modelleringskompetansen (Jensen, 2009). Ein ser her samanheng med den kulturelle grunngevinga, der ein identifiserer matematikk som er brukt i samfunnet. Om ein ser dette perspektivet i samband med modelleringsprosessen i Figur 1, vil modellering som kritikk vere å vurdere andre sitt arbeid med å gjennomføre dei ulike stega framfor å utføre desse sjølv. Denne forståinga av modellering kan koplast til å lære elevane å tenke kritisk, som vist til frå opplæringslova. Under føremålet i læreplanen for matematikkfaget kan ein også sjå at dette er kompetanse som blir vektlagt: «Eit aktivt demokrati treng borgarar som kan setje seg inn i, forstå og kritisk vurdere kvantitativ informasjon, statistiske analysar og økonomiske prognosar» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). Ein må setje seg inn i vurderingar som andre har gjort for å kunne forstå og kritisk vurdere matematisk modelleringsarbeid som andre har utført.

## Metode

Føremålet med studien er å kunne seie noko om modellering sin plass i matematikkfaget no, og i komande læreplan. Det vart difor gjennomført ein innhaldsanalyse av læreplanane i matematikk. Eitt av forskingsspørsmåla som er stilt, søker svar på kor mange gongar ulike former for ordet modell er nemnt i læreplanen og i kva samanheng orda er brukt. Læreplandokument bør innehalde uttrykk og termar som signaliserer intensjonane for kva som skal undervisast og lærast (Frejd & Geiger, 2017). Måten lærarar, lærarutdannarar og lærebokforfattarar tolkar meininga og viktigheita av slike signalord på, vil ha innverknad på kva som blir undervist i klasserommet. Ein måte å måle viktigheita av desse orda i eit fag kan vere å sjå på frekvensen og plasseringa av orda i læreplanen.

Utgangspunktet for analysen er gjeldande læreplan i matematikk, LK06 (Utdanningsdirektoratet, 2013), og utkast til den komande læreplanen, LK20 (Utdanningsdirektoratet, 2019). Begge læreplanane er inkludert i datamaterialet, for å kunne seie noko om utviklinga og det som kjem. I LK06 gjeld planen for matematikk fellesfag for 1.-11.trinn. I LK20 har kvart av dei to faga fyrste året på vidaregåande eigne læreplanar. I LK06 har yrkesretta matematikk eigen plan, medan i LK20 er denne delt opp i dei ulike yrkesretningane og inkludert under dei ulike matematikkfaga. Grunna ulikskapane er det her valt å sjå vekk i frå yrkesfag, og berre inkludere studieretta matematikk i vidaregåande skule. Datamaterialet omfattar altså matematikkplanane for alle åra i grunnskulen og matematikkplanane som gir generell studiekompetanse i vidaregåande skule. Dette gjeld praktisk orientert matematikk (1P og 2P), teoretisk orientert matematikk (1T), matematikk for realfag (R,) og matematikk for samfunnsfag (S).

I analysen vart dei tre perspektiva på matematisk modellering, modellering som innhald, modellering som fartøy, og modellering som kritikk brukt som kategoriar. Desse vart brukt framfor grunnane til Blum (2015), sidan desse fokuserer

på målet med sjølve modelleringsaktiviteten, heller enn å argumentere for arbeid med modellering. Kwart av tilfella der orda modell, modellere og modellering er brukt i læreplanane, vart plasserte i ein av desse kategoriane. Nokre stadar i læreplanane er orda nemnt utan forklarande tekst, for eksempel i ei oppramsing av arbeidsmåtar. Det vart difor laga ein fjerde kategori for uspesifisert bruk av orda. Kvar av kategoriane vart skildra basert på litteratur vist til i teoridelen. Fyrst vart delar av kodinga utført. I tilfelle der det var usemje i kodingane, vart desse diskutert av forfattarane. Kategoriane vart spesifiserte i forsøk på å gjere dei eintydige. For å vere modellering som innhald måtte anten prosessen frå kvardagslivet til matematikk vere skildra, eller det å tolke tilbake til kvardagslivet. I modellering som fartøy måtte det vere skildra minst ein av prosessane «å omforme» eller «tolke». Ein må altså gå frå eit område til eit anna. For modellering som kritikk måtte konteksten til modelleringsordet innehalde noko å vurdere. Tabell 1 syner ei skildring av kategoriane brukt i analysen. NVivo vart brukt i kodingsarbeidet, og begge forfattarane koda alt i datamaterialet parallelt. Kodingane vart samanlikna ved hjelp av verktøyet i NVivo. Det kom fram at det i gjennomsnitt er 98,3% einigheit i kodingane.

**Tabell 1:** Kategoriskildring brukt i analysen.

Perspektiv på modellering	Skildring
Ikkje modellering	Ein (fysisk) modell blir brukt som ein representasjon, til dømes konkretiseringsmateriell som kuleramme som modell for titalssystemet.
Modellering brukt utan spesifisering	Bruk av ordet modellering utan forklarande tekst, eller berre i ei oppramsing av tema eller arbeidsmåtar.
Modellering som fartøy	Modellering for å lære noko anna. Fokus på å utvikle matematiske omgrep og forståing, til dømes gjennom bruk av representasjonar. Minst ein av prosessane omforme eller tolke må vere nemnt, i tillegg til eit matematisk område ein skal modellere innanfor.
Modellering som innhald	Modellering der målet er modelleringa i seg sjølv, å utvikle modelleringskompetanse, kopling mellom kvardagsliv og matematikk, tolke matematiske løysingar tilbake til konteksten. Bruke matematikk i ikkje-matematiske situasjonar, forankra i prosessane. Minst ein av prosessane omforme eller tolke må vere nemnt.
Modellering som kritikk	Modellering skildra som viktig for å forstå samfunnet me lever i. Læreplanen må innehalde formuleringar som omhandlar kritisk vurdering

## Resultat

Resultata blir presentert i tre underkategoriar. Den fyrste tek føre seg frekvensen av ordet modell i dei to læreplanane. Dei to neste tek føre seg bruken av modell i fagplanane for matematikk i høves vis LK06 og LK20.

## Frekvensen av modell

Ved å søke etter modell i LK06 og LK20, ser ein tydeleg skilnad mellom dei to når det gjeld frekvensen av ordet. Tabellen under gir ei oversikt over talet på kor mange gonger modell førekjem i dei ulike delane av LK06 og LK20.

**Tabell 2:** Oversikt over modell i LK06 og LK20.

LK06		LK20	
1.-11. trinn	5	1.-10. trinn	16
–	–	1P	11
–	–	1T	10
2P	16	2P	11
R	8	R	15
S	9	S	13
Totalt	38	Totalt	76

Totalt ser me at ulike former av ordet modell førekjem 38 gonger i LK06 og 76 gonger i LK20. Dette er ei auke på 38, altså ei dobling. I LK06 omfattar læreplanen i matematikk fellesfag både grunnskulen og dei studieførebuande og yrkesfaglege studieprogramma i fyrste året i den vidaregåande opplæringa. I LK20 skil ein mellom grunnskule og vidaregåande opplæring. Det som i kolonnen for LK06 heiter Fellesfag omfattar difor Grunnskule, 1P og 1T i kolonnen for LK20. Dette gjer at auken i bruk av ordet modell blir endå tydelegare.

På den andre sida inneheld læreplanen for 1P og 1T i LK20 identiske skildringar av kjerneelementet modellering og anvending, samt svært like skildringar knytt til undervegsvurdering i faget. Ein kan difor diskutere om alle treffa er heilt reelle i så måte. Likevel rår det liten tvil om at det er ei vesentleg auke i førekomsten av ordet modell frå LK06 til LK20, og dette gjeld særleg for grunnskulen.

Sjølv om det kan vere nyttig å sjå på bruken av ordet modell kvantitativt, gir ikkje dette det fulle biletet. Difor skal me vidare sjå på korleis modell blir brukt i dei to læreplanane. Me tek då utgangspunkt i dei tre ulike perspektiva på modellering, knytt til mål med modellering i undervisinga.

## Bruken av ordet modell

Utgangspunktet for analysen i denne delen er kategoriane me gjorde greie for i Tabell 1. Tabell 3 under syner talet på referansar kategorisert innanfor dei ulike perspektiva på modellering i LK06 og LK20.

**Tabell 3:** Tal på referansar innanfor modelleringperspektiv.

Perspektiv på modellering	LK06	LK20
Ikkje modellering	4	1
Modellering utan spesifisering	8	21
Modellering som fartøy	14	10
Modellering som innhald	10	13
Modellering som kritikk	2	13



Ut frå tabellen ser me at alle perspektiva er representerte i dei to læreplanane. I LK06 er modellering som fartøy og modellering som innhald mest brukt, medan det er få døme på modellering som kritikk. I LK20 er ordet modell brukt flest gonger utan spesifisering. I høve til LK06 er det i LK20 ei tydeleg auke i bruken av ordet modell i samband med perspektivet modellering som kritikk. Me vil vidare gå inn på dei ulike modelleringsperspektiva i dei to læreplanane.

### *Modelleringsperspektiv i LK06*

I LK06 er fagplanen for matematikk bygd opp av føremål, hovudområde, timetal, grunnleggjande ferdigheiter, kompetansemål og vurdering. Under føremål kan me lese at «matematisk kompetanse inneber å bruke problemløysing og modellering til å analysere og omforme eit problem til matematisk form, løyse det, og vurdere kor gyldig løysinga er» (Utdanningsdirektoratet, 2013, s. 2). Denne setninga finn me både for fellesfaget 1.-11. trinn, 2P og S. Her er det ikkje nemnt om problemet er i ein kontekst, eller om det er meint eit problem frå dagleglivet. Det kan likevel tolkast som modellering som innhald, sidan problemet ikkje opphavleg har matematisk form, men skal analyserast og omformast. Målet er å bruke matematikk til å analysere og løyse problem, og til å vurdere løysingane.

Modellering er også nemnt i dei grunnleggjande ferdigheitene gjennom rekning og digitale ferdigheiter. Her er ordet modellering brukt i opprømsing av arbeidsmåtar, utan nærare spesifisering om innhaldet eller føremålet med modelleringa.

I fellesfaget matematikk, frå 1. til 11.trinn, er ikkje modellering nemnt i kompetansemåla i det heile. Under kompetansemåla for geometri etter 4. årssteget er ordet “modell” brukt, men her er det snakk om arbeid med fysiske modellar av geometriske former. Det er såleis ikkje snakk om modellar i eit modelleringsperspektiv.

I vidaregåande opplæring er modellering tydeleg uttrykt i LK06, særleg i matematikkfaget 2P (12.trinn), der modellering er eitt av fire hovudområde:

Hovudområdet modellering gjev eit overordna perspektiv på faget matematikk. Modellering er ein fundamental prosess i faget, der utgangspunktet er noko som verkeleg finst. Dette blir beskrive matematisk med ein modell som blir bearbeidd, og resultatane av det blir tolka i lys av den opphavlege situasjonen. (Utdanningsdirektoratet, 2006, s. 2)

Her er det tydeleg at ein ikkje går ut i frå eit matematisk problem i ein kontekst, men at utgangspunktet er noko som verkeleg finst. Altså å bruke matematikk til å løyse eit problem som i utgangspunktet ikkje er matematisk. I tillegg er viktigheita av modelleringsprosessen trekt fram, noko som gjer dette til modellering som innhald. Me finn også døme på modellering som innhald i kompetansemåla for modellering, samt for funksjonar. Ein kan også argumentere for modellering som kritikk, med tanke på at elevane skal kunne lage modellar av ulike praktiske situasjonar og kritisk vurdere kva informasjon modellane gir og eventuelt skjuler.

I R og S er modellering nemnt i samband med hovudområdet funksjonar. I kompetansemåla i S-planen finn me berre døme på modellering som fartøy. Her er det presisert kva som skal modellerast og kva matematisk emne som skal arbeidast med. Til dømes skal ein bruke funksjonar til å modellere og skildre praktiske situasjonar (kompetansemål for S1 under hovudområdet Funksjonar). Det er altså arbeidet med funksjonar som er det sentrale, og ikkje sjølve modelleringprosessen. Dette er også tilfelle i R-planen, men med eitt unntak. I R2 under hovudområdet for funksjonar står det at eleven skal kunne “formulere en matematisk modell ved hjelp av sentrale funksjoner på grunnlag av observerte data, bearbeide modellen og drøfte resultat og framgangsmåte.” Dette kompetansemålet omfattar heile modelleringprosessen, og kan difor verte forstått som perspektivet modellering som innhald.

I hovudsak finn me modellering som innhald i føremåla med faga, medan kompetansemåla, med nokre få unntak, handlar om modellering som fartøy. Faget 2P skil seg ut frå resten, med meir fokus på modellering som innhald, også i kompetansemåla. Det er også døme på at ordet modellering blir brukt utan nærare spesifisering, eller at det blir brukt i ein annan samanheng enn modellering, til dømes det å byggje ein modell av ein geometrisk figur.

### *Modelleringsperspektiv i LK20*

Utkastet til LK20 har ein litt anna struktur enn LK06. Her har matematikk fellesfag ein plan som gjeld for 1. til 10. trinn, og eigne planar for kvart av fellesfaga 1P, 1T og 2P, samt programfaga R og S. Fagplanane er bygd opp av fagrelevans, kjerneelement, verdiar og prinsipp, tverrfaglege tema, grunnleggjande ferdigheiter, og kompetansemål og vurdering.

Under fagrelevans er det fellesfaga for 1.-10. trinn, 1P og 2P, som nemner arbeid med modellering. Her blir det trekt fram at modellering er sentralt for å kunne forstå forhold og samanhengar i samfunnet, og det er difor snakk om modellering som kritikk.

Modellering og anvendingar er eitt av kjerneelementa i matematikkfaget. Kjerneelementa skal «prege innholdet og progresjonen i læreplanene» (Utdanningsdirektoratet, 2017). I Kjerneelementer i fag, vedteke for den nye læreplanen, er det tydeleg at modelleringprosessen skal starte frå eit problem frå verkelegheita.

Modellering og anvendelser – Elevene skal ha innsikt i hvordan matematikk brukes i dagligliv, samfunnsliv, vitenskap og teknologi. Det innebærer å ta en problemstilling fra virkeligheten, omformulere den til en matematisk modell og tolke modellen i lys av den opprinnelige situasjonen. Elevene bør få innsikt i hvordan modeller kan anvendes i nye situasjoner. Kritisk tenkning er viktig å utvikle i slike sammenhenger. (Kunnskapsdepartementet, 2018, s. 15)

Kjerneelementet er skildra med mindre variasjonar og tilpassingar i dei ulike fagplanane for matematikk. Felles for alle planane er at modelleringprosessen er skildra ved at elevane skal matematisere eit problem frå den verkelege verda, og

vurdere og tolke modellane. Dette peikar mot perspektivet modellering som innhald. I modellering som innhald vektlegg ein arbeid med problem som i utgangspunktet ikkje er matematisk formulerte. I tillegg kan ein også argumentere for perspektivet modellering som kritikk, med tanke på at viktigheita av modellering for å forstå samfunnet blir trekt fram.

Modellering er også nemnt i samband med kjerneelementet “Matematiske kunnskapsområde” for 1.-10. trinn. Her er det ikkje spesifisert kva modelleringa handlar om, berre at elevane skal modellere. Det same gjeld for det tverrfaglege temaet “Folkehelse og livsmestring”, som me finn i planen for 1.-10. trinn, 1P, R og S. I dei tre sistnemnde er det presisert at gjennom forståing for matematiske modellar skal elevane få mogelegheit til å ta ansvarlege livsval. Ein kan difor argumentere for at dette er modellering som kritikk. Det blir ikkje uttrykt eksplisitt at modelleringskompetanse bidreg til forståing av samfunnet, men ein kan tenkje seg at det er ein føresetnad for å kunne ta ansvarlege livsval.

I kompetansemåla for 4. og 10. trinn, samt i undervegsvurderinga for 8. trinn finn me døme på modellering som innhald. Her skal elevane modellere situasjonar frå sin eigen kvardag og utforske praktiske samanhengar. I tillegg skal dei omsetje mellom representasjonsformer, forklare sine egne tenkjemåtar og argumentere. Det vil seie at dei skal matematisere, validere og forklare, og difor er det modellering som innhald.

I kvar av planane for matematikk 1P og for 1T finn me modellering i bruk éin gong, og kompetansemålet er nesten identisk i dei to planane. I 1P skal elevane modellere verkelege situasjonar frå samfunns- og arbeidsliv, forklare, validere og tolke. I 1T er det realfaglege situasjonar som skal modellerast. Her er det modellering som innhald som er gjeldande. Elevane skal modellere verkelege situasjonar.

I kompetansemåla for R, S og 2P er modellering brukt utan spesifisering. Her er det nemnt kva matematiske tema som skal nyttast i modelleringa, og ein kan såleis argumentere for at ein arbeider med representasjonar og difor modellering som fartøy. Likevel er det ikkje nemnt noko om omforming her, og kodinga vart difor modellering utan spesifisering.

## Diskusjon

For å kategorisere dei ulike funna av ordet modell i læreplanane, brukte me ei tredeling ut i frå målet med modelleringsarbeidet (Barbosa, 2006; Julie, 2002). Det er sjølvstomt mogleg at ein aktivitet kan ha fleire mål, og at det kan vere problematisk å plassere ei matematisk oppgåve innanfor ein bestemt kategori. Men når det gjeld formuleringar i læreplanen, vil desse kategoriane vere ei hjelp til å vise kva som er meint med modellering i matematikkfaget.

Som det kjem fram av resultatdelen, er det grunn til å seie at alle dei tre perspektiva på modellering er vektlagt i læreplanen. Måla for modelleringsaktivitetar vil påverke kva oppgåvetypar ein jobbar med. Sidan dei ulike perspektiva heng tett

saman, vil det vere slik at ein kan utvikle modelleringskompetanse også når ein jobbar med modellering for å til dømes lære noko om funksjonar. Likevel er det viktig å jobbe med å utvikle modelleringskompetanse ved å fokusere på kvar av delprosessane (Blomhøj & Højgaard Jensen, 2003), stega i modelleringsprosessen, i figur 1. Modellering som fartøy er kanskje enklare å gripe tak i, sidan det allereie er gitt kva ein skal modellere, og at modelleringa dermed blir ein representasjon av det gitte matematiske fenomenet. Dette perspektivet kan slik knytast til kjerneelementet representasjon og kommunikasjon. Det er difor grunn til å tru at kjerneelementet modellering og anvending fokuserer på noko anna enn arbeid med representasjonar. På den måten er modellering og anvending nærare knytt til perspektivet modellering som innhald, der bruk av matematikk og det å kunne modellere er i fokus.

I tabell 3 kjem det fram at modellering utan spesifisering er brukt mange gongar i utkastet til ny læreplan. Sidan alle tre perspektiva er representerte i læreplanen, er det difor ikkje gitt kva perspektiv som er meint i desse tilfella. Det blir då opp til kvar enkelt lærebokforfattar og lærar å skulle avgjere kva som skal blir vektlagt i modelleringsaktivitetane. Vidare kjem det også fram i tabell 3 at modellering som kritikk er meir vektlagt i utkastet til ny læreplan. Dette samsvarar med grunngevinga for fagfornyninga, at opplæringa skal gjere elevane rusta til å henge med i utviklinga, og vere relevant for samfunnsliv, arbeidsliv og teknologi.

Modell er brukt klart fleire gonger i utkastet til den nye læreplanen LK20 i forhold til i LK06. Spesielt gjeld dette planane for 1.-11. trinn, der auken er størst. Dette kan ein forstå som at modellering blir meir vektlagt i den komande læreplanen enn det er no. Dette samsvarer også med trendar internasjonalt.

I seinare år har det internasjonalt blitt lagt meir vekt på «real world problem solving» og modellering, mellom anna gjennom omgrepet mathematical literacy i PISA-rammeverket (Galbraith, 2012). I den norske læreplanen vart dei grunnleggande ferdigheitene innført i 2006, og ein kan dra parallellar mellom den grunnleggande ferdigheita å rekne og mathematical literacy (Breakspear, 2012). Ein kan til dømes sjå samanhengar mellom dei sju stega i modelleringsprosessen i Figur 1 og dei fire ferdigheitsområda innan den grunnleggande ferdigheita å rekne. Dei tre fyrste stega «constructing», «simplifying/structuring» og «mathematise» går under ferdigheitsområdet «å gjenkjenne og beskrive (formulate)», det fjerde steget «working mathematically» er å «bruke og bearbeide (employ)», medan dei tre siste stega, «interpreting», «validating» og «exposing», går under dei to siste ferdigheitsområda, å «kommunisere og reflektere (interpret)» og «vurdere (evaluate)». Slik kan ein seie at den grunnleggane ferdigheita å rekne er delvis overlappende med modelleringskomptanse.

Sjølv om ordet modellering ikkje er brukt i skildringa av rekning i rammeverket for grunnleggande ferdigheiter (Utdanningsdirektoratet, 2012), kan ein likevel finne det under vurdering. Til dømes under måloppnåing av å gjenkjenne og beskrive, kan ein finne at ein er på nivå 5 om ein «omformer og formulerer modellen for vidare arbeid». Dette kan ein forstå som ein del av ein modelleringsprosess. Dei andre stega i modelleringsprosessen er også skildra, utan at ordet modellering er nemnt.

I LK20 skal ein i tillegg til dei grunnleggande ferdigheitene innføre tverrfaglege tema og kjerneelement i kvart fag. I matematikk skal ein arbeide med det tverrfaglege temaet folkehelse og livsmeistring. Det handlar om å gi elevane kompetanse i personleg økonomi og forståing for matematiske representasjonar og modellar for å hjelpe dei til å ta ansvarlege livsval (Utdanningsdirektoratet, 2019). Dette kan ein kople til modellering som kritikk.

Eitt av kjerneelementa som skal innførast i matematikkfaget, er modellering og anvending. Her kan ein, som nemnt tidlegare, tenke seg at det er snakk om modellering som innhald, der ein skal modellere for å finne ut av noko, og for å utvikle modelleringskompetanse. «Kjerneelementa i matematikk rammar inn det viktigaste innhaldet i faget og beskriv det elevane må lære for å kunne meistre og bruke faget» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Kjerneelementa skal ligge til grunn for djupnelæring i faget på alle klassetrinn. I LK06 var modellering eitt av fire hovudområde, men berre i faget 2P, 2.året i vidaregåande skule. Ein kan ut i frå dette også seie at modellering skal spele ei større rolle i faget etter LK20.

I nokre av tilfella der ordet modell er brukt i læreplanen, har forfattarane koda ulikt. I utarbeiding av kategoriane vart det forsøkt å gjere desse eintydige. Likevel vart altså noko koda i to kategoriar. Dette kan tyde på at det ut i frå formuleringane kan vere begge kategoriar, og at kategoriane er overlappande. At det er presisert kva målet med modellering er, kvar gong ordet er brukt, er likevel ikkje avgjerande. Det er meir problematisk at matematisk modellering ikkje er klart definert i læreplanen.

Ut frå frekvensen av ordet modell kan ein sjå at modellering har ei stor rolle i læreplanen, og det er opplagt at lærarar og lærebokforfattarar må vite kva som ligg i dette for å implementere det på ein god måte. Modellering blir i LK20 definert som «ei beskriving av verkelegheita med matematisk språk», og elevane «skal ha innsikt i korleis modellar i matematikk blir brukte for å beskrive dagleglivet, arbeidslivet og samfunnet elles». Det er ikkje nok å kommentere at ein skal jobbe med modellering, utan å forklare kva det inneber. Lærarar må ha kjennskap til kva modellering er og korleis ein skal arbeide med modellering i skulen. Dette seier ikkje læreplanen noko om. Det gjer at det kan vere utfordrande for lærarar å vite korleis dei skal arbeide med det nye kjerneelement og undervise i tråd med læreplanen.

I denne artikkelen har me avgrensa undersøkingane våre til å berre omfatte eksplisitt bruk av former for ordet modell. I vidare analysar av læreplanane ville det vore interessant å undersøke om ein kan finne grunnlag for arbeid med modellering, utan at det blir eksplisitt uttrykt. Til dømes kan ein i utkastet til LK20 under kompetansemål etter 2.trinn lese at eleven skal kunne «utforske addisjon og subtraksjon og bruke dette til å formulere og løyse problem frå leik og eigen kvardag» (Utdanningsdirektoratet, 2019). Her kan ein kjenne igjen delar frå starten av modelleringsprosessen. Når ein kjenner til dei ulike perspektiva på modellering, kan ein finne fleire døme frå læreplanen der kvar av dei tre ulike perspektiva blir jobba med. Dersom modellering ikkje blir klart definert nokon stad i læreplanen, og heller ikkje i lærebøkene, er

det vanskeleg å sjå desse koplingane. Det kan difor bli mindre tydeleg kor stor rolle modellering kan ha i matematikkundervisinga.

Avslutningsvis tillét me oss å uttrykke glede over at modellering har fått ein tydelegare plass i læreplanen. Samstundes må ein vere medviten om at det er krevjande å endre undervisningspraksis. For at lærarar skal kunne undervise i tråd med det modelleringsfokuset LK20 legg opp til, må det også utviklast og tilbydast kompetansehevingstiltak på dette området. Det er også viktig at arbeid med matematisk modellering blir framheva i lærarutdanningane.

## Referansar

- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective I *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(3), 293–301.
- Blomhøj, M. & Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching mathematics and its applications.*, 22(3), 123–139.
- Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What Do We Know, What Can We Do? I *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Dordrecht: Springer.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I *Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics-ICTMA 12*, 222–231. Chichester, UK: Horwood.
- Blum, W. & Pollak, H. (2018). Foreword. I R. Borromeo Ferri (Red.), *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education* (s. vii–viii). Cham: Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham: Springer.
- Breakspear, S. (2012). The policy impact of PISA: An exploration of the normative effects of international benchmarking in school system performance. OECD Education Working Papers No. 71. I. Paris: OECD Publishing. Henta frå <http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/5k9fdfqffr28-en.pdf?expires=1521547085&id=id&accname=guest&checksum=CDFFCCF8C035C8B0E37C367894DD31FE8>
- Erfjord, I. (2005). Matematisk modellering. *Tangenten* (Issue), s. 115–121.
- Frejd, P. & Geiger, V. (2017). Exploring the notion of mathematical literacy in curricula documents. I G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Red.), *Mathematical modelling and applications*, 255–263. Cham: Springer International Publishing AG.
- Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, Purposes or Perspectives. *Journal of mathematical modelling and application*, 5(13), 3–16.
- Hana, G. M. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Bergen: Caspar Forlag AS.
- Jablonka, E. & Gellert, U. (2010). Ideological roots and uncontrolled flowering of alternative curriculum conceptions. I *Proceedings of the Sixth International Mathematics Education and Society Conference*, 31–49. Berlin: Freie Universität Berlin.

- Julie, C. (2002). Making relevance relevant in mathematics teacher education. I *Proceedings of 2nd international conference on the teaching of mathematics*. New York: Wiley.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. I *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(3), 302–310.
- Kunnskapsdepartementet. (2018). *Kjerneelementer i fag*. Henta frå <https://www.regjeringen.no/contentassets/3d659278ae55449f9d8373fff5de4f65/kjerneelementer-i-fag-for-utforming-av-lareplaner-for-fag-i-lk20-og-lk20s-fastsatt-av-kd.pdf>
- Niss, M. (1990). Matematiske modeller, almindannelse og demokrati. I *Matematikundervisning og demokrati* (s. 67–75). Roskilde: IMFUFA Roskilde universitetscenter.
- Opplæringslova. (1998). *Lov om grunnskolen og den vidaregåande opplæringa (LOV-1998-07-17-61)*. Henta frå [https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61#KAPITTEL\\_1](https://lovdata.no/dokument/NL/lov/1998-07-17-61#KAPITTEL_1)
- Utdanningsdirektoratet. (2006). Læreplanverket for Kunnskapsløftet. Læreplan i matematikk 2P (MAT5-03). Henta frå <https://www.udir.no/kl06/MAT5-03/Hele/Hovedomraader>
- Utdanningsdirektoratet. (2012). *Rammeverk for grunnleggende ferdigheter*. Oslo. Henta frå [https://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/lareplangrupper/rammeverk\\_grf\\_2012.pdf](https://www.udir.no/globalassets/upload/larerplaner/lareplangrupper/rammeverk_grf_2012.pdf)
- Utdanningsdirektoratet. (2013). Læreplan i matematikk fellesfag. Henta 16.08.17 frå <http://data.udir.no/kl06/MAT1-04.pdf>
- Utdanningsdirektoratet. (2017, 15. juli). Kjerneelementer – fag i grunnskolen og gjennomgående fag i vgo. Henta 12.08.19 frå <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/kjerneelementer/>
- Utdanningsdirektoratet. (2018, 26. november). Hva er fagfornyelsen? Henta frå <https://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/fagfornyelsen/nye-lareplaner-i-skolen/>
- Utdanningsdirektoratet. (2019). Høring – læreplan i matematikk. Henta 12.08.19 frå <https://hoering.udir.no/Hoering/v2/343?notatId=656>