Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

Berget, Vos

Kva er matematisk modellering?

Kva er matematisk modellering? Kvifor matematisk modellering? Korleis ser ei modelleringsoppgåve ut? Er ein modell det same som ein representasjon? Modellering har vore med i norske læreplanar i fleire tiår. Ikkje alle lærarar har hatt om matematisk modellering i eiga utdanning, noko som kan føre til usikkerheit knytt til korleis ein bør undervise om det (Berget, 2023). Gjennom denne artikkelen vil vi gi nokre svar på desse spørsmåla. Målet er å få fram mangfaldet i korleis ein kan forstå omgrepet, og at mange ulike elevaktivitetar kan inngå som arbeid med matematisk modellering.

Kva er ein matematisk modell?

Ifølgje læreplanen LK20 er ein modell i matematikk «ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 2). Eit eksempel på dette er korleis utviklinga av talet på smitta personar under koronapandamien vart uttrykt ved hjelp av differensiallikningar. Desse likningane er då ein modell. I eksamensoppgåver er ein matematisk modell ofte ein funksjon (sjå eksempel på Figur 1).

Slik ein modell er presentert i LK20, er det ikkje gitt at denne «beskrivinga av verkelegheita i matematisk språk» må vere ein funksjon. For eksempel kan ein trekant vere ein geometrisk modell for å beskrive situasjonen der ein har sett ein stige oppetter husveggen. Eit kart av skuleområdet kan ein forstå som ein todimensjonal modell av eit tredimensjonalt objekt frå verkelegheita. Ifølgje LK20 kan også sektordiagram, tabellar og linjegrafar baserte på data frå verkelegheita vere matematiske modellar.

Kan ein seie at er ein matematisk modell for kor mange elevar det er om ein slår saman A- og B-klassa? Eller at talet «7» er ein modell for kor mange tenner Silje har mist? Og er sju teljestrekar ein annan matematisk modell for det same? Svaret er «ja», sidan desse symbola eller symbolrekkene er ei matematisk beskriving av noko frå verkelegheita. Kjerneelementet som inkluderer matematisk modellering, skal vere ein del av undervisinga frå 1. til 13. trinn. Det finst ikkje svar på kor kompleks ein matematisk modell må vere for å kunne kallast ein matematisk modell.

Ingeborg Lid Berget
Høgskulen i Volda
bergeti@hivolda.no

Pauline Vos
Høgskulen på Vestlandet
pauline.vos@hvl.no

Kva er matematisk modellering, og korleis kan ei modelleringsoppgåve sjå ut?

Somme ser på matematisk modellering som å uttrykke ein samanheng ved hjelp av eit funk-

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten

Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning

sjonsuttrykk (Berget, 2022). Eksempel på dette kan ein finne i nokre tidlegare gitte eksamensoppgåver. Oppgåva kan vere å lage ein funksjon ut ifrå ein gitt tabell ved hjelp av regresjonsanalyse i GeoGebra, eller å stille opp ein eksponentialfunksjon basert på opplysningar som er gitt, slik som i oppgåva på Figur 1. I tillegg kan ein få spørsmål om å lese av verdien til grafen for ein gitt x-verdi, eller få spørsmål om å vurdere for kva x-verdiar modellen er gyldig. I slike oppgåver blir ikkje modellen brukt for å løyse noko verkelegheitsnært problem, men elevane må svare på gitte lukka matematiske spørsmål som har eitt korrekt svar.

I ein bydel er det i dag 30 000 innbyggjarar. Anta at innbyggjartalet vil auke med ein fast prosent kvart år, og at det i løpet av 10 år vil vere dobla. Lag ein modell f som illustrerer situasjonen. Teikn grafen til f, og marker punktet $(5, f(5))$. Forklar kva koordinatane til dette punktet fortel om situasjonen.

Figur 1: Oppgåve 3 frå eksamen i matematikk 2P del 2 våren 2022.

I internasjonal litteratur, for eksempel i Niss og Blum (2020), er det presisert at å lage ein matematisk modell er ein del av modelleringsprosessen, der ein har som mål å løyse eit problem som i utgangspunktet ikkje er formulert med matematisk språk. Ifølgje denne forklaringa kan oppgåva på Figur 2 vere ei modelleringsoppgåve. Medan andre, for eksempel Niss og Jensen (2002), krev også at ein for alvor må setje seg inn i konteksten for å kunne kalle det arbeid med matematisk modellering. Dei ville difor ikkje ha kategorisert oppgåva slik ho er formulert på Figur 2, som ei modelleringsoppgåve, og heller ikkje oppgåva på Figur 1. Dette fordi ein kan løyse oppgåvene utan å måtte gjere vurderingar knytte til konteksten oppgåva er formulert i. Oppgåva på Figur 1 er heller ikkje formulert som eit problem frå verkelegheita som skal løysast, for eksempel som eit samfunnsproblem om aukande befolkningsvekst som treng ei løysing.

Ein lærar kan endre oppgåva på Figur 2 slik at ho også oppfyller Niss og Jensen (2002) sine krav til modelleringsoppgåve, at elevane må setje seg inn i konteksten. For desse endringane anbefaler Borromeo Ferri (2018) å redusere gitt informasjon, å innføre ekte autentiske aspekt i oppgåva og å stille eit ope spørsmål. Til Luca-oppgåva kan ein fjerne informasjonen om kor mange sokkar det er i kvar pakke. Spørsmålet kan heller vere kva råd elevane vil gi til Luca når han skal kjøpe nye sokkar til alle hundane. Då må elevane både finne ut kor mange sokkar som trengst totalt, og

Luca har 14 trekkhunder.
Alle hundene trenger nye sokker til alle labbene.
Det er to sokker i hver pakke.

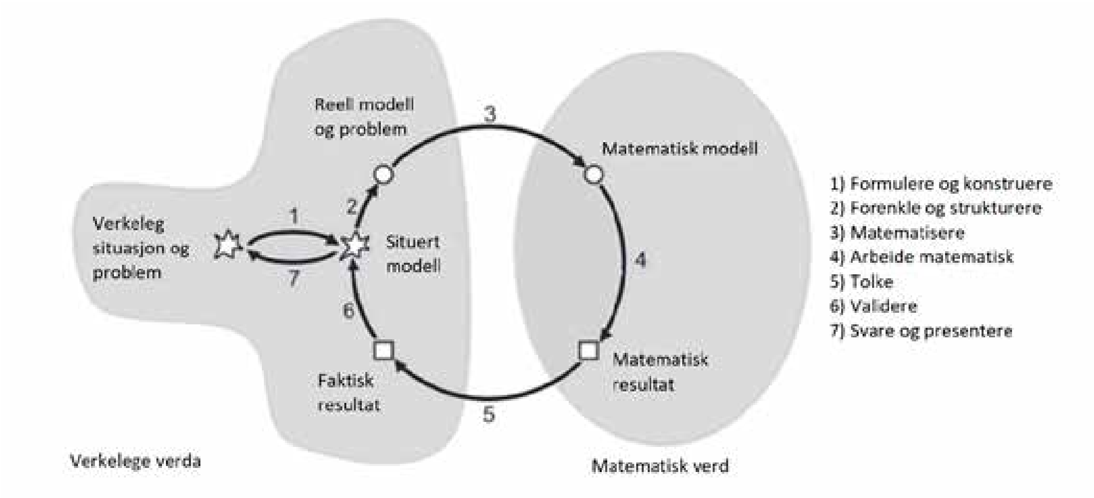
Hvor mange pakker må Luca kjøpe?

Svar:

Figur 2: Oppgåve frå «Nasjonal prøve i regning 5. trinn 2020. Veiledning til lærere – oppfølging og videre arbeid med prøven».

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten



Figur 3: Modell av modelleringsprosessen. «The Blum-Leiss modelling cycle», henta frå Niss og Blum (2020, s. 17). Omsett av oss.

i tillegg gjere vurderingar baserte på det dei veit om potesokkar. Ved å gjere eit søk på internett kan ein finne at ekte potesokkar i den verkelege verda ofte blir selde i pakkar på fire, og at dei finst i ulike størrelsar og til sommar- eller vinterbruk. For å kunne hjelpe Luca å bestille potesokkar treng elevane å setje seg inn i konteksten. Dei må vite om trekkhundane til Luca treng store eller små sokkar, og om det er spesifikke krav til potesokkar som skal brukast til hundekøyring.

Om ein forstår matematisk modellering som å måtte setje seg inn i konteksten for å løyse eit problem ved hjelp av matematikk, er det nærare knytt til matematisk problemløysing. Elevane må sjølve avgjere kva framgangsmåte dei vil nytte, og innanfor kva matematisk område dei vil arbeide for å løyse problemet. Dette står i kontrast til oppgåver der ein får oppgitt at ein må bruke regresjonsanalyse i GeoGebra eller svare på lukka spørsmål med berre eitt korrekt svar, slik som i oppgåvene på Figur 1 og Figur 2. Enkelte meiner at ei modelleringsoppgåve ikkje har eitt korrekt svar, men at det som kjenneteiknar ei modelleringsoppgåve, er at elevane sjølve må finne informasjonen dei legg til grunn, og gjere forenklingar for å kome fram til ei løysing på problemet (Borromeo Ferri, 2018). Der vil då vere fleire moglege svar, og ein viktig del av modelleringsprosessen er å avgjere om løysinga er rimeleg, ved å vurdere forenklingar som er gjorde, og føresetnader som er lagde til grunn for den matematiske modellen som vart utforma og brukt. Heile prosessen blir gjerne uttrykt som ein modelleringssyklus, for eksempel som vist på Figur 3.

I denne syklusen er verbet «matematisere» brukt om overgangen frå å uttrykke det forenkla problemet med eit kvardagsleg språk til å uttrykke det med eit matematisk språk. Det er altså dette som blir gjort i oppgåva på Figur 1 når ein går frå slik modellen er uttrykt med ord i oppgåva, til ein oppstilt eksponentialfunksjon. Dette blir sett på som ein del av modelleringsprosessen. Liknande eksamensoppgåver som vist på Figur 1 kan ha ført til at matematisk modellering berre har blitt oppfatta som «matematisering», og ein har ikkje jobba med resten av prosessen i undervisinga, som funne i Berget (2022, 2023). Slike oppgåver kan vere nyttige for å få erfaring med matematisering, men for å inkludere heile modelleringsprosessen når elevar jobbar med matematisk modellering, må også strukturering av problemet og forenklingar som ikkje allereie er gjorde, få plass. Då er der også større krav til å validere løysinga ein kjem fram til, og til å gjere greie for svaret ein får.

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten

Modelleringsperspektiv		Forslag til oppgåve	Om oppgåva
Modellering frå tekstoppgåve	Elevar blir utfordra til å velje rett informasjon og rekneart for å finne det korrekte svaret. Den høgre sida av modelleringssyklusen, stega knytte til den matematiske verda er vektlagt.	351 jenter fekk namnet Nora i Noreg i 2022, og 414 gutar fekk namnet Jakob. Desse namna var på topp. 1. januar 2022 var folketalet i Noreg 5 425 270 personar. 5543 personar flytta i 2022 til Møre og Romsdal frå andre fylke i Noreg, og 5764 flytta frå Møre og Romsdal til andre fylke. Ved utgangen av 2022 var folketalet i Noreg 5 488 984. Kor mange prosent auka folketalet i Noreg i løpet av 2022?	Tekstoppgåve som skjuler ei matematisk oppgåve. Teksta inneheld overflødig informasjon slik at elevane må identifisere kva som er relevant.
Matematikkretta modellering	Elevar blir utfordra til å reflektere over matematiske strukturar. Delar av modelleringssyklusen blir utført, men ikkje det første og dei siste tre stega.	Her er ei oversikt over folketalet i Noreg nokre utvalde år, henta frå ssb.no. 1980: 4 078 900; 1990: 4 233 116; 2000: 4 478 497; 2010: 4 858 199; 2020: 5 367 580 a) Finn ein lineær funksjon som passar til befolkningsveksten mellom 1980 og 2020. b) Kor mange innbyggarar er det ifølgje modellen i Noreg i 2030 og i 2040? c) Argumenter for bruk av andre enn lineære funksjonar for å modellere befolkningsveksten.	Elevane må bruke matematikk og teoretisk reflektere over bruken av han, for eksempel knytt til gyldigheits-område.
Modellering for motivasjon	Formålet er at elevane utviklar modellerings-kompetanse og får positive erfaringar med matematikk og modellering. Kan inkludere alle stega i modelleringssyklusen. Stega å matematisere og å arbeide matematisk er vektlagt.	Her er ei oversikt over folketalet i Noreg nokre utvalde år, henta frå ssb.no. 1980: 4 078 900; 1990: 4 233 116; 2000: 4 478 497; 2010: 4 858 199; 2020: 5 367 580 Korleis vil folketalet i Noreg utvikle seg dei komande ti åra?	Opa oppgåve som ikkje er formulert matematisk. Elevane kan velje metode sjølve. Dei må lage og validere ein modell.
Omgrepsretta modellering	Formålet er å starte frå konkrete og kjente område for å reflektere over matematiske samanhengar. Dermed utviklar elevane forståing av matematiske omgrep på ein induktiv måte.	Det er fire faktorar som påverkar folketalet: fødselstal, dødstal, innvandring og utvandring. Finn korleis desse faktorane har påverka folketalet i Noreg dei siste åra, og lag modellar for å seie noko om utviklinga for dei neste 10 åra.	Opa oppgåve som krev lang tid. Arbeid med oppgåva bygger funksjons-omgrepet, der folketalet er ein avhengig variabel.

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikk-undervisning*, *35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten

Samfunnskritisk modellering	Elevar erfarer at det kan vere relevant å bruke matematikk i argumentasjon knytt til samfunnsaktuelle spørsmål. Dei må også stille seg kritiske til bruk av matematikk i samfunnet. Ofte må elevane «gå gjennom» heile modelleringssyklusen, og særleg er dei tre siste stega viktige.	Prosjekt om dilemma i fruktbarheitspolitikk 1. Fleire politikarar har uttalt seg om temaet: a. https://www.nrk.no/ytring/erna-solberg-onsker-seg-flere-barn.-det-er-det-god-grunn-til-1.14352172 b. https://www.nrk.no/vestfoldogtelemark/folkevalt-meiner-det-a-ikkje-fa-barn-bidreg-til-ein-livsfiendtleg-og-egoistisk-kultur-1.16591450 Bruk tekstene og dine eigne erfaringar til å formulere minst seks ulike påstandar om fruktbarheit. Du treng ikkje vere einig i dei. 2. Det finst ein matematisk samanheng mellom fruktbarheita og folketalet. a. Kva blir folketalet i Noreg i 2030 og i 2040 viss fruktbarheitstalet held seg på 1,41 i framtida, slik som det var i 2022 (https://www.ssb.no/befolkning/fodte-og-dode/statistikk/fodte/artikler/rekordlav-fruktbarhet-i-2022)? b. Kva bør fruktbarheitstalet i Noreg vere om vi skal ha den same prosentvise folketalsveksten som vi har hatt, dersom innvandringa er stabil? 3. Diskuter korleis matematiske analysar kan hjelpe eller forvirre samfunnsdebatten om fruktbarheit.	Målet er å bruke matematikk for å kunne diskutere eit dilemma i samfunnet.

Tabell 1: Namna på dei ulike perspektiva er opphaveleg *contextual modelling*, *epistemological modelling*, *educational modelling*, *realistic modelling* og *socio critical modelling*.

Kva er målet med matematisk modellering, og kva har det å seie for oppgåvene?

Det finst fleire grunnar til at matematisk modellering er med i læreplanen. Modellering kan vere ein arbeidsmåte som gjer at elevane blir motiverte for matematikkfaget dersom dei jobbar med eit tema som interesserer dei. Ved å jobbe med matematisk modellering kan dei også oppdage at det er nyttig å kunne matematikk, for dei treng matematisk kunnskap for å løyse kvardagsproblem. Om elevar får setje seg inn i matematiske modellar som er brukte i samfunnet og i enkelte yrke (for eksempel av ingeniørar eller frisørar), får dei erfare at matematikk er relevant. Ein kan også arbeide med matematisk modellering for å forstå abstrakt matematikk. Ved å bruke matematikk i ein konkret situasjon kan ein oppdage matematiske samanhengar. Og når ein jobbar med matematisk modellering, blir ikkje matematikk eit isolert skulefag, men ein kan sjå nytta av det i andre fag og i livet elles. Såleis kan ein utvikle modelleringskompetanse som er nyttig for å meistre livet.

Sidan de er fleire forskjellige grunnar for å jobbe med modellering, kan ein legge vekt på ulike aktivitetar og delar av modelleringsprosessen i undervisinga innanfor ulike mål. Vi har, inspirert av Kaiser og kollegaer (2007) og Blum (2015), utforma ein tabell med oversikt over ulike modelleringsperspektiv og oppgåvetypar. Vi har tatt utgangspunkt i situasjonen presentert på Figur 1 og laga ulike oppgåver tilpassa ungdomstrinnet eller vidaregåande skule knytte til ulike modelleringsperspektiv.

Viss vi skal knyte dei to oppgåvene på Figur 1 og Figur 2 til desse perspektiva, vil vi seie at oppgåva på Figur 1 passar eit *omgrepsretta* perspektiv, og at oppgåva på Figur 2 kan ha vore

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten

designa som *modellering frå tekstoppgåve* eller knytt til perspektivet *modellering for motivasjon*.

Representasjonar i matematikk og matematiske modellar

Kan vi forstå ein funksjonsmodell som ein symbolsk representasjon? Er matematiske modellar også representasjonar? Omgrepa modell og representasjon har mange fellestrekk. For å beskrive forskjellane vil vi ta utgangspunkt i bakgrunnen for kvart av omgrepa, som er brukte med eit ulikt føremål og i ulike samanhengar.

Omgrepet *representasjon* er skildra i læreplanen LK20 som «måtar å uttrykkje matematiske omgrep, samanhengar og problem på» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 3). Dette samsvarar med slik representasjonar er definerte i matematikkdidaktisk litteratur (Duval, 2006; Janvier, 1987): «Representasjonar kan vere konkrete, kontekstuelle, visuelle, verbale og symbolske» (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 3). For eksempel kan ein framstille ein brøk symbolsk, $\frac{3}{4}$, verbalt som «tre kvarter av noko» og visuelt som eit punkt på tallinja. Kontekstuelt kan brøk bli framstilt i rekneforteljingar om fire barn som deler tre sjokoladeplater. Kvar representasjon gir ei ulik framstilling av $\frac{3}{4}$. Omgrepet re-presentasjon betyr igjen-framstilling. I dette tilfellet vil det seie at eit matematisk objekt som først er uttrykt på éin måte, deretter blir presentert igjen på ein annan måte. Desse ulike framstillingane kan erstatte kvarandre, og andre måtar å framstille på kan gi ny forståing av sjølve objektet. Derfor er omgrepet representasjon brukt av forskarar som omtalar forståing av matematiske omgrep (slik som brøk, likningar, funksjonar, derivasjon osb.). Elevar får djupare forståing når dei kan framstille omgrepa på ulike måtar, både fleksibelt og hensiktsmessig (Kilpatrick et al., 2002; Valenta, 2015).

Omgrepet *modell* blir ofte brukt i andre enn matematikkdidaktiske samanhengar, fordi det finst andre modellar enn dei matematiske. Ein modell innan arkitektur kan vere ein fysisk modell av eit byggeprosjekt, og Bohrs atommodell er framstilling av korleis eit atom er bygd opp. Ein modell er ofte ei forenkling av noko, og har den fordelen at han ikkje inkluderer alt kaos og all støy. Dei første matematiske modellane om utvikling av tal på smitta personar i koronapandemien var forenklingar av den ekte situasjonen, og hadde ikkje med variablar som dødsfall og vaksinering. Potesokkmodellen knytt til trekkhundar (sjå Figur 2) tek ikkje omsyn til om hundeeigarar vil ha reservesokkar fordi dei kan miste sokkar på tur, eller at ein kvalp kan tygge sund ein sokk. Ein annan bruk av omgrepet modell er om eit skjema (for eksempel eit flytskjema for å ta avgjersler), eller eit nestenperfekt tilfelle, for eksempel modellar innan klesmote eller ideelle oppgåver som elevane bør øve på. I alle desse tilfella skil modellar seg frå den «normale» verda ved å vere forenklingar og idealiseringar av verkelegheita, som er meir rotete og kompleks. Det er sagt at alle modellar er feil, men at nokre er nyttige (Box, 1976). Modellar har altså avgrensingar, men kan likevel brukast. Ved hjelp av modellar kan ein løyse problem som elles er vanskelege å løyse.

Er matematiske modellar det same som representasjonar? For å svare på dette kan vi sjå på korleis den matematiske modellen er framstilt. Er han ein konkret, kontekstuell, visuell, verbal eller symbolsk representasjon? Ofte skal ein matematisk modell vere symbolsk (uttrykt med tal, operasjon, funksjonsuttrykk, likningar osb.) eller visuell (diagram, grafar osb.). Dette er altså den same modellen, men han er uttrykt ved hjelp av ulike representasjonsformer. I problemløysingsprosessen kan ein modell også ha ulike representasjonar. For eksempel kan ein for å hjelpe Luca (sjå Figur 2) først teikne ei skisse av alle dei 14 hundane på papir der alle har fire strekar som representerer potane. Skissa er ei forenkling og dermed ein reell modell som kan bli brukt til å setje opp eit multiplikasjonsstykke. Ein kan neppe oppfatte den reelle modellen som ein matematisk modell, men han er viktig i vidare

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten

matematisering. Samtidig er skissa ein visuell representasjon, og den etterfølgjande multiplikasjonen er ein symbolsk representasjon. Den opphavelege Luca-oppgåva var skriven i setningar og er dermed både ein verbal og kontekstuell representasjon. Viss oppgåva hadde vore gitt då klassa var på besøk heime hos Luca og fekk møte alle hundane og sett dei såre potane, hadde det vore ein konkret representasjon. Men dette er altså representasjonar av ein situasjon, og ikkje av eit matematisk omgrep slik representasjonar er skildra i læreplanen. I modelleringssyklusen av Niss og Blum (2020) føreslår dei at den kaotiske opphavelege situasjonen først blir omorganisert til ein reell modell, som ei hensiktsmessig forenkling i løysinga av problemet.

Om vi skal svare på spørsmålet om samanhengen mellom modellar og representasjonar, kan vi basert på desse avsnitta konkludere med at representasjonar ikkje er det same som matematiske modellar, men at der finst overlapp.

Matematisk modellering kan inkludere mange ulike aktivitetar, og det handlar om å arbeide med matematikk på ein slik måte at elevane erfarer at matematikk er relevant og nyttig å kunne. Viss elevane jobbar med matematikk som eit isolert fag, er det ikkje sjølvsagt at dei vil gjere koplingar til situasjonar der dei kan bruke matematikk. Dei må også lære korleis matematikk kan bli brukt i kvardagsliv, yrkesliv og samfunn, og jobbe med å avdekke matematiske strukturar i kontekstar der det ikkje er brukt eit matematisk språk. Ved å inkludere matematisk modellering i undervisinga strekker ein seg etter å «førebu elevane på eit samfunn og arbeidsliv i utvikling» og «ruste elevane til å gjere eigne val og ta stilling til viktige spørsmål i eige liv og i samfunnet», slik det er formulert i læreplanen (Kunnskapsdepartementet, 2020, s. 2).

Referanser

Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic studies in mathematics education, 27*(1), 51–70.

Berget, I. K. L. (2023). Mathematical modelling in the discourses of the KOM and PISA frameworks and teacher interviews. *Research in Mathematics Education*, 1–18. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2165536

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What Do We Know, What Can We Do? I S. J. Cho, *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer, Cham.

Box, G. E. P. (1976). Science and statistics. *Journal of the American Statistical Association, 71*(356), 791–799. https://doi.org/10.1080/01621459.1976.10480949

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Janvier, C. (Red.). (1987). *Problems of representation in the learning of mathematics*. Erlbaum.

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M. & Garcia, F. J. (2007). Report from the working group modelling and applications-Differentiating perspectives and delineating commonalties. I *Proceedings of the fifth congress of the European society for research in mathematics education* (s. 2035–2041). University of Cyprus.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2002). *Adding up: Helping children learn mathematics*. National Academies Press. https://nap.nationalacademies.org/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics

Kunnskapsdepartementet. (2020). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn* (MAT01-05). Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020.

Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriets forlag.

Valenta, A. (2015). Aspekter ved tallforståelse. *Matematikksenteret*. https://beta.matematikksenteret.no/sites/default/files/attachments/page/Valenta_Tallforsta%CC%8Aelse.pdf

Berget, I. L., Vos, P.. (2024). Kva er matematisk modellering? *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 35*(2), 2–8.

www.caspar.no/tangenten