VITENSKAPELIG PUBLIKASJON

KAPITTEL 4

Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen?

Ingeborg Lid Berget Høgskulen i Volda
Maria Løvgren Universitetet i Oslo
Andreas Pettersen Universitetet i Oslo

Samandrag: Matematisk modellering handlar om å bruke matematikk til å løyse problem frå den verkelege verda. Resultat frå fleire studiar viser at den første delen av modelleringsprosessen, der problemet skal omsetjast til eit matematisk problem, er spesielt krevjande for elevar, og at matematikkoppgåver i liten grad utfordrar elevane i dette. I dette kapittelet presenterer vi eksempel på korleis matematisk modellering er framstilt i eit utval av litteratur om matematikkundervisning. Vidare gjer vi greie for utviklinga av eit analyseskjema som blir brukt for å undersøke kva for utfordringar elevane møter og ikkje møter i arbeid med modelleringsprosessen i PISA-oppgåver. Vi analyserer også to tidlegare gitte eksamensoppgåver for 10. trinn om matematisk modellering. I resultata kjem det fram at PISA-oppgåvene berre utfordrar elevane i delar av *handlingane* i å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket, særleg å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar, og å lage ein matematisk modell. Gjennom kapittelet gir vi eksempel på ulike typar modelleringsoppgåver og presenterer både frigitte PISA-oppgåver og andre oppgåver. Vidare argumenterer vi for at analyseskjemaet kan vere nyttig for matematikklærarar for å bidra til økt refleksjon og bevisstgjering om kva for utfordringar knytte til matematisk modellering elevane møter i ulike oppgåver.

Nøkkelord: Matematisk modellering, PISA, modelleringssyklus, kjenne igjen og formulere, eksamensoppgåve, rekning som grunnleggande ferdigheit

Sitering: Berget, I. L., Løvgren, M. & Pettersen, A. (2024). Å kome i gang med matematisk modellering i klasserommet – kan PISA-oppgåver vise veg frå kaos til system i første del av modelleringsprosessen? I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (Kap. 4, s. 75–110). Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch4

Abstract: In mathematical modelling, mathematics is used to solve real-world problems. Findings from multiple studies indicate that the initial phase of the modelling process, in which the problem is translated into a mathematical problem, is particularly challenging for students. Further, it seems that mathematical tasks often do not sufficiently challenge students in this part of the modelling process. In this chapter, we present examples of how mathematical modelling is presented in the research literature. We further elaborate on our development of an analysis scheme used to investigate the challenges that students encounter, and do not encounter, while working on the modelling process in PISA tasks. We also use the scheme to analyse two mathematical modelling exam tasks previously given to the 10th grade. The results reveal that only parts of the actions in the *formulate* process of the PISA framework are actually tested in the PISA tasks, particularly recognising structure, patterns and relationships, and, creating a mathematical model. Throughout the chapter, we put emphasis on providing examples of different types of modelling tasks, and present released PISA tasks and other tasks. Furthermore, we argue that the analysis scheme can be valuable for mathematics teachers to facilitate increased reflection and awareness about the challenges related to mathematical modelling encountered by students in various tasks.

Keywords: mathematical modelling, PISA, modelling cycle, formulate, exam task, numeracy as a basic skill

Eitt mål med matematikkundervisninga i skulen er at elevane skal kunne bruke kunnskapen og ferdigheitene dei utviklar i matematikkfaget til å handtere situasjonar og løyse problem dei møter i livet utanfor klasserommet (Kunnskapsdepartementet, 2019; Niss & Blum, 2020). Matematisk modellering i undervisninga handlar om nettopp dette: å bruke matematikk til å løyse slike problem som ein kan møte utanfor skulematematikken. Eit eksempel på eit problem som krev matematisk modellering, er å svare på spørsmålet «kva kostar det å ta ein dusj?» (sjå figur 1). Til skilnad frå meir tradisjonelle matematikkoppgåver krev denne og andre modelleringsoppgåver at ein må setje seg inn i og forstå problemet og omforme det til eit matematisk problem før ein kan arbeide matematisk og kome fram til eit svar. I oppgåva i figur 1 vil denne omforminga krevje at ein gjer forenklingar og avgrensingar, hentar inn relevant informasjon og strukturerer problemet ved å bestemme variablar og samanhengar mellom desse. Vidare kan ein lage ein matematisk modell som kan brukast til å rekne på kva det kostar å ta ein dusj. Løysinga ein kjem fram til, må vurderast, og sidan det ofte finst fleire løysingar på modelleringsoppgåver, er det viktig også å gjere greie for kva som ligg til grunn i utviklinga av den matematiske modellen. Å gjere greie for samanhengen og overgangen mellom den verkelege verda og den matematiske verda er ein sentral del av matematisk modellering. Vi kjem tilbake til oppgåva i figur 1 seinare i kapittelet.

Les dette utdraget frå eit debattinnlegg i ei avis.

Det koster ikke 30 kroner å dusje!

Avisene ønsker å maksimere strømkrisen. Da er dusjing blitt et yndet tema. Dagsrevyen har innslag fra treningssentre som har kø i dusjen, fordi det koster 30 kr å dusje hjemme. Slike påstander sprer seg fort, særlig når ingen prøver å kvalitetssikre utregningene […].

https://www.aftenbladet.no/meninger/debatt/i/8QbEgE/det-koster-ikke-30-kroner-aa-dusje

Oppgåva er å svare på dette spørsmålet:

Kva kostar det å ta ein dusj?

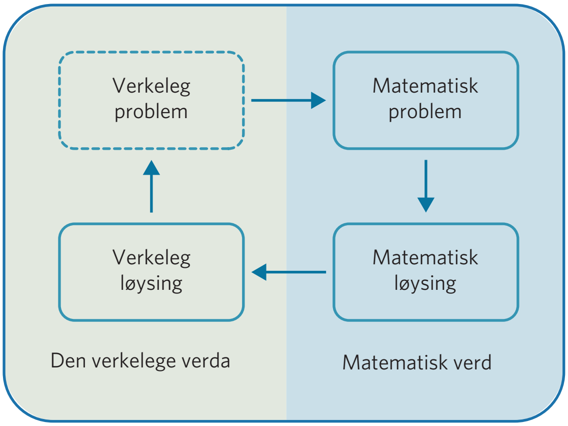
Figur 1. Eksempel på modelleringsoppgåve. Bildet er henta frå freepik.com

Matematisk modellering er ikkje noko nytt. Matematikk og matematisk kunnskap har alltid vorte brukt i ulike samanhengar for å forstå verda og løyse problem, både teoretiske og praktiske (Gjone, 1996). Dette har også lenge vore ein del av læreplanen i Noreg. For eksempel står det i mønsterplanen frå 1987 at undervisninga i matematikk skal ta sikte på «å utvikle kunnskapane og dugleikane til elevane slik at dei ser på matematikk som ein nyttig reiskap når dei skal løyse problem i dagleglivet og i yrkessamanheng» (Kyrkje- og undervisningsdepartementet, 1987, s. 194). Samtidig har matematisk modellering fått ein større plass i matematikklæreplanane i fleire land dei siste tiåra, også i Noreg (Berget & Bolstad, 2019). I fagfornyinga av kunnskapsløftet (LK20) er matematisk modellering innført som eit eige kjerneelement, «modellering og anvendingar». Dette inneber at matematisk modellering skal vere ein sentral del av matematikkfaget gjennom heile grunnskulen og i vidaregåande opplæring. I tillegg spelar modellering ei viktig rolle i «rekning som grunnleggande ferdigheit» (Berget & Bolstad, 2019). Modellering er altså ikkje berre ein del av matematikkfaget, men skal vere ein del av undervisninga på tvers av fag i skulen. Også i internasjonale undersøkingar, slik som i PISA (Programme for International Student Assessment), spelar matematisk modellering ei sentral rolle, der elevane skal løyse problem formulerte i ulike praktiske kontekstar (OECD, 2023a).

I dette kapittelet skal vi sjå nærare på den første delen av modelleringsprosessen, nemleg overgangen frå den verkelege verda til den matematiske verda, og korleis ein kan angripe eit kaotisk kvardagsproblem som ikkje er forenkla eller strukturert. Med utgangspunkt i PISA-rammeverket og to andre skildringar av matematisk modellering har vi utvikla eit analyseskjema for å konkretisere og vurdere kva for utfordringar som krevst for å omforme eit problem frå den verkelege verda til eit matematisk problem. Eit slikt verktøy kan vere nyttig for å gjere denne delen av matematisk modellering meir konkret, og det kan gjere oss meir bevisste på utfordringane elevar møter, og ikkje møter, i arbeidet med matematisk modellering. Vidare har vi brukt skjemaet til å analysere oppgåver gitt i PISA 2022 for å undersøke kva for utfordringar elevane møter i PISA-oppgåvene når dei skal gå frå ein situasjon i den verkelege verda til å uttrykke dette matematisk, og kva som kjenneteiknar desse oppgåvene. Til slutt analyserer vi to eksamensoppgåver for 10. trinn knytte til matematisk modellering for å vurdere kva utfordringar oppgåvene gir, og diskuterer dei i lys av resultata i analysen av PISA-oppgåvene.

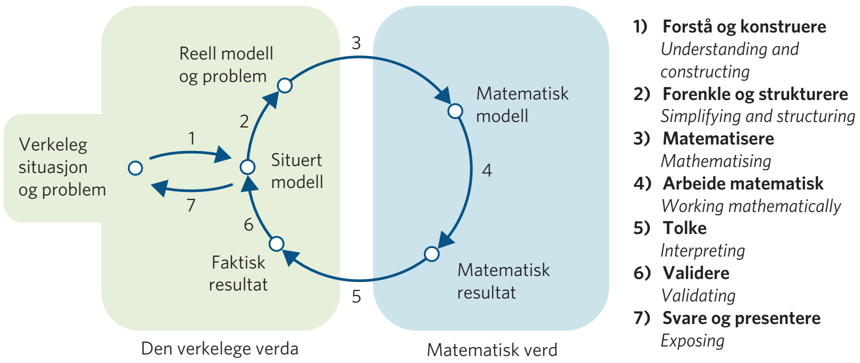
Modelleringsprosessen

Ein kan sjå på matematisk modellering som ein prosess der ein flyttar seg fram og tilbake mellom den verkelege verda og ei matematisk verd (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Ein kan framstille denne prosessen som vist i figur 2, der ein startar med eit verkeleg problem ein skal løyse (oppe til venstre i figuren).



Figur 2. Enkel framstilling av prosessen matematisk modellering. Inspirert av Blum (2015, s. 77)

Å gå frå verkeleg problem til matematisk problem blir kalla «å matematisere», mens forenklingane og struktureringane ein først gjer av det verkelege problemet, blir kalla «prematematisering» (Niss & Blum, 2020). Modelleringsprosessen er ofte framstilt som ein syklisk prosess med ulike delprosessar eller steg som ein jobbar seg gjennom for å løyse problem frå verkelegheita. Det er ikkje slik at elevar følgjer prosessen steg for steg, men dei kan hoppe fram og tilbake mellom dei ulike stega (Borromeo Ferri, 2018). Ulike modelleringssyklusar er utvikla for ulike føremål og speglar også at det finst litt ulike syn på kva matematisk modellering er (Kaiser, 2020). Modelleringssyklusen av Blum og Leiss (2007) (sjå figur 3) er eit anna eksempel på ei framstilling av modelleringsprosessen og har fleire steg enn den i figur 2. Modelleringssyklusen i figur 3 er uttrykt frå eit kognitivt perspektiv og skildrar prosessen eleven går gjennom i arbeidet med matematisk modellering.



Figur 3. Modelleringssyklus inspirert av Blum og Leiss (2007, s. 225)

I denne syklusen blir matematisk modellering presentert gjennom dei sju stega som er lista opp til høgre i figuren. Vi vil no forklare kvart av dei sju stega ved å ta føre oss oppgåva vi presenterte i figur 1, «Kva kostar det å ta ein dusj?».

Steg 1 er å forstå og konstruere ein situert modell, altså at elevane må etablere ei forståing av situasjonen. Dei må for eksempel vite at det kostar pengar å varme opp vatn, og at vi betaler straumrekning. Dei må vite at det er vanleg å ha varmtvasstank, og at kva type dusj, kor lenge ein dusjar og dermed mengda vatn, spelar inn på prisen. Det same gjer for eksempel temperaturskilnad på vatnet inn i varmtvasstanken og ut i dusjen, og straumprisen.

I steg 2 må elevane forenkle og strukturere. Dei må velje kva dei skal ta omsyn til, og gjere forenklingar. For eksempel kan dei gå ut frå ein spesifikk dusjtype og finne ut kor mykje vatn som går gjennom dusjhovudet per minutt. Dei kan gjere ei vurdering av ulike dusjtypar, slik som ein «sparedusj», der det blir brukt mindre vatn per tid. Her kan dei søke på internett og finne ut detaljar om ulike dusjhovud. Dei kan også samle empiri ved for eksempel å finne ut kor lang tid dei treng til å fylle ei 10 liters bøtte med ulike dusjar. Dei kan også bestemme seg for å føre statistikk og finne gjennomsnittstida elevane i klassa bruker i dusjen. Her kan læraren organisere erfaringsdeling mellom elevgruppene og vere til støtte i idémyldringsprosessen.

Steg 3, å matematisere, inneber å omforme den reelle modellen til eit matematisk språk (Blum & Leiss, 2007). Den matematiske modellen kan ha ulike variablar. Dersom elevane vel å setje opp ein funksjon, må dei kanskje forenkle med berre å la éin uavhengig variabel variere. For eksempel kan det vere interessant å studere pris som funksjon av tid du dusjar. Då må elevane bruke konstantar på andre variablar, slik som straumpris og kor mykje vatn som blir brukt per minutt. Ut frå den matematiske modellen kjem dei etter steg 4, å arbeide matematisk, fram til eit matematisk svar. Å arbeide matematisk kan mellom anna inkludere å rekne, bruke hjelpemiddel, kritisk vurdere, overføre til andre representasjonsformer, resonnere og utforske matematisk. I dusj-oppgåva vil dei kanskje nytte GeoGebra til å teikne grafen og lese av for nokre verdiar. Elevane må tolke den matematiske løysinga inn i den situerte modellen og gi det matematiske svaret meining i den praktiske konteksten (steg 5). Kva betyr punktet på grafen? Og kva fortel stigningstalet? Kva har det å seie for den praktiske situasjonen? Gir det meining?

Vidare vurderer elevane svara dei har fått i steg 6, og dei må i tillegg vurdere modellen sin. Kanskje vil dei heller la noko anna variere og for eksempel lage eit uttrykk for pris som funksjon av tid på døgnet dei dusjar (som er avhengig av korleis straumprisen varierer gjennom døgnet). Då endrar dei den matematiske modellen og må dermed gjere steg 3–6 på nytt. Til slutt må elevane gjere steg 7, der dei forklarer korleis forenklingane deira og vala dei gjorde, påverka svaret dei kom fram til. For eksempel at modellen berre er gyldig om føresetnadene stemmer, og at løysinga dei kjem fram til, kan diskuterast. Vidare kan dei bruke det dei kom fram til når dei deltar i diskusjonar om privatøkonomi og sparing, eller er kritiske til framstillingar i media.

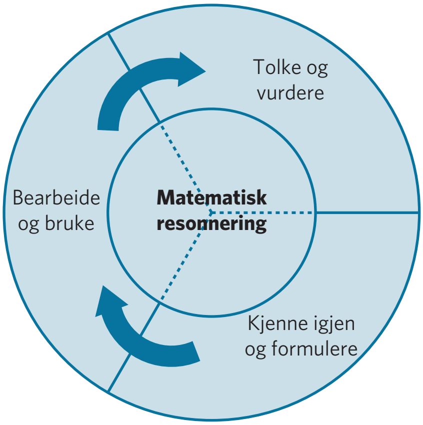
Modelleringssyklusar er først og fremst eit verktøy for å forstå matematisk modellering. I følgje Blum og Leiss (2007) er syklusen deira eigna for å hjelpe elevane til å ha eit meta-perspektiv på korleis dei arbeidar når dei modellerer. I tillegg får lærarar eit utgangspunkt for å identifisere kva elevane strevar med i modelleringsarbeidet, og kan dermed lettare hjelpe dei vidare. Ein fare ved å aktivt bruke ein slik syklus i modelleringsarbeidet med elevane kan vere at ein reduserer kreativt modelleringsarbeid til å fylgje ei fast oppskrift steg for steg. Vi vil derfor presisere at slike syklusar er meint som inspirasjon eller hjelp til meta-refleksjon, men ikkje som ei oppskrift på korleis ein skal jobbe med modellering. Frejd (2011) operasjonaliserte dei ulike delane av modelleringsprosessen for å kunne analysere eksamensoppgåver, og utvikla til saman 11 kategoriar og hjelpespørsmål basert på ein modelleringssyklus. Dette kan også vere ei hjelp for lærarar i arbeidet med å velje hensiktsmessige modelleringsaktivitetar i undervisninga. Vi kjem tilbake til Frejd (2011) si operasjonalisering seinare i kapittelet, når vi gjer greie for utviklinga av analyseskjemaet vårt.

Matematisk modellering i PISA

Formålet med PISA 2022 er å måle elevane si evne til å «resonnere matematisk og å formulere, bruke og tolke matematikk for å løyse problem i ulike verkelegheitsnære situasjonar» (OECD, 2023, s. 22, vår omsetjing). Denne vektlegginga av å løyse problem i ulike situasjonar gjer at matematisk modellering spelar ei sentral rolle i undersøkinga, der å *kjenne igjen og formulere* (*formulate*), å *bearbeide og bruke* (*employ*) og å *tolke og vurdere* (*interpret*) viser til tre ulike steg i modelleringsprosessen som elevane må arbeide med for å løyse PISA-oppgåvene. Opne modelleringsoppgåver der ein er involvert i heile modelleringsprosessen, er ofte svært tidkrevjande å løyse, og utfordrande å vurdere i skriftlege prøver (Niss et al., 2007). Dette inkluderer også nasjonale matematikkeksamenar i vidaregåande skule (Frejd, 2011). PISA-oppgåvene er ikkje utforma slik at elevane blir utfordra på heile modelleringsprosessen i kvar oppgåve. Kvar PISA-oppgåve involverer enkelte delar av prosessen slik at oppgåvene til saman avdekker kompetansen elevane har i matematisk modellering.

I PISA-rammeverket er prosessen illustrert gjennom ein modelleringssyklus (figur 4) med tre steg. Denne modelleringssyklusen er utvikla frå det som i tidlegare PISA-rammeverk vart kalla «mathematical modelling cycle» (OECD, 2013) og «mathematising cycle» (OECD, 2004). Modelleringssyklusen i PISA har mange fellestrekk med andre, men er mindre detaljert enn for eksempel syklusen, presentert i figur 3. Samanliknar ein dei to syklusane, finn ein at *kjenne igjen og formulere* inneheld stega 1) formulere og konstruere, 2) forenkle og strukturere og 3) matematisere. *Bearbeide og bruke* kan knytast til steg 4) arbeide matematisk, og *tolke og vurdere* inneheld stega 5) tolke og 6) validere. I tillegg kjem steg 7) svare og presentere.

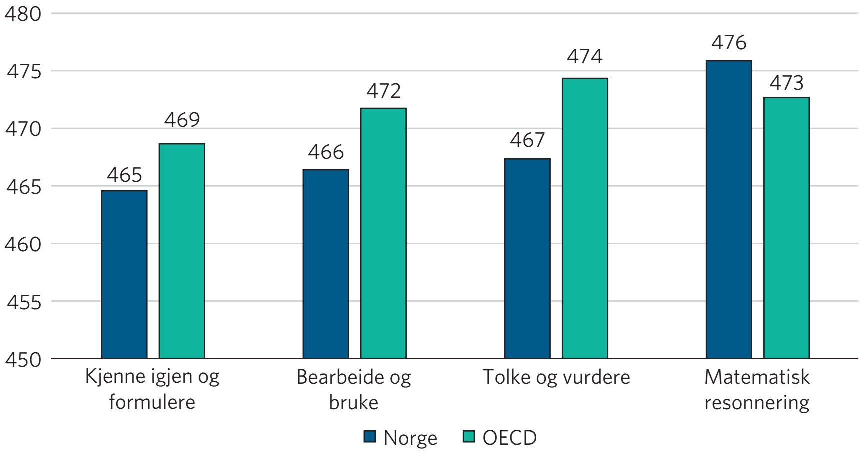
Nytt i rammeverket for PISA 2022 er at *matematisk resonnering* er inkludert i tillegg til dei tre nemnde stega. *Matematisk resonnering* handlar mellom anna om å trekke slutningar, vurdere situasjonar, velje strategiar og utvikle løysingar, og er relevant i alle stega i modelleringssyklusen (OECD, 2023). I tillegg handlar *matematisk resonnering* om å kunne vurdere og legge fram argument og vurdere tolkingar og slutningar knytte til påstandar grunngitt ved matematiske resultat, som går utover det å løyse problem (OECD, 2023). I dette kapittelet vil vi ikkje gå nærare inn på *matematisk resonnering*, men det kan du lese meir om i kapittel 5 av Senneset og Pettersen (2024) i denne boka.



Matematisk prosess	Tal på oppgåver
Kjenne igjen og formulere	48
Bearbeide og bruke	75
Tolke og vurdere	57
Matematisk resonnering	54

Figur 4. Modelleringssyklusen i rammeverket for matematikk i PISA 2022. Figuren er tilpassa og omsett frå OECD (2023a). Tabellen til høgre viser kor mange oppgåver det totalt var i PISA 2022 knytte til kvar av prosessane

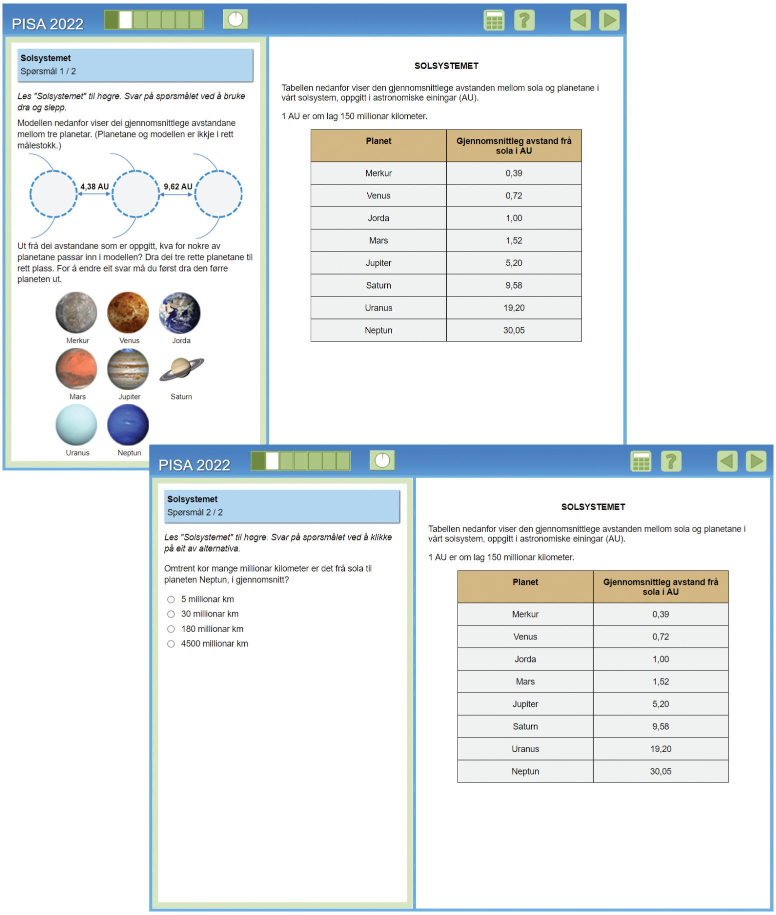
Kvar av oppgåvene i PISA er kategoriserte i dei fire matematiske prosessane ut frå kva som er mest sentralt for å løyse oppgåva. Tabellen til høgre i figur 4 viser kor mange av matematikkoppgåvene i PISA 2022 som er kategoriserte i dei ulike prosessane.



Figur 5. Resultata for norske elevar og for OECD-gjennomsnittet for dei tre modelleringsstega og for matematisk resonnering i PISA 2022 (OECD, 2023b). Standardfeilen er mellom 2,2 og 2,5 for dei norske verdiane og mellom 0,4 og 0,5 for verdiane i OECD-gjennomsnittet

Figur 5 viser resultata i dei tre modelleringsstega og i matematisk resonnering frå PISA 2022 for dei norske elevane og for gjennomsnittet blant

OECD-landa. På oppgåver innanfor å *kjenne igjen og formulere* presterte norske elevar på same nivå som OECD-gjennomsnittet, men lågare enn elevane i Danmark (485 poeng), Finland (482 poeng) og Sverige (474 poeng) (OECD, 2023b). Også i dei tre andre prosessane presterte norske elevar lågare enn elever i Danmark, Finland og Sverige. Norske elevar presterte på same nivå som dei islandske i *bearbeide og bruke*, og høgare i dei tre andre prosessane (OECD, 2023b).



Figur 6. Frigitt oppgåve frå PISA 2022, «Solsystemet»

For at elevane skal bli testa i kva grad dei klarer å bruke matematiske kunnskapar og ferdigheiter til å løyse problem frå verkelegheita, er alle oppgåvene i PISA-undersøkinga knytte til ein kontekst. I figur 6 viser vi eit eksempel på to frigitte PISA-oppgåver frå 2022 som er plasserte i ein vitskapeleg (scientific) kontekst. Den første oppgåva (til venstre i figur 6) er kategorisert under prosessen *tolke og vurdere*, mens oppgåve to (til høgre) er knytt til prosessen *bearbeide og bruke*. Mange av PISA-oppgåvene er utforma som fleirvalsoppgåver slik som denne, men det er også oppgåver med opne svarfelt (eksempel på slike opne oppgåver kan du sjå i Senneset og Pettersen (2024), kapittel 5 i denne boka).

I oppgåve 1 i figur 6 får elevane presentert ein modell som viser avstanden mellom tre planetar. For at elevane skal svare på spørsmålet, må dei tolke denne modellen, som kan vere ei noko uvanleg framstilling for elevane, og forstå korleis dei kan bruke informasjonen i tabellen til å kome fram til desse avstandane. Dette er knytt til prosessen *tolke og vurdere*. I oppgåve 2 skal elevane gjere omrekning mellom einingar for å svare på oppgåva, altså *bearbeide og bruke* matematikk. Rammevilkåra i PISA gjer som nemnt at det ikkje er med fullstendige modelleringsoppgåver som testar heile prosessen (OECD, 2013), men oppgåvene er altså knytte til eitt av dei tre stega i modelleringsprosessen.

I PISA-rammeverket er kvar av dei tre stega i modelleringsprosessen skildra med fleire ulike *handlingar* (*actions*). Desse *handlingane* skildrar kva oppgåvene innanfor kvart steg kan krevje av elevane, og er på den måten ei hjelp til å konkretisere ulike handlingar som er venta. I éi oppgåve kan det vere nødvendig å gjennomføre éi eller fleire av desse *handlingane*. Eitt eksempel på ei slik *handling* for steget *kjenne igjen og formulere* er å «omsetje eit problem til ein vanleg matematisk representasjon eller algoritme» (OECD, 2023, s. 45, vår omsetjing). Slike konkrete skildringar hjelper oss å få tak på kva utfordringar som møter elevane i modelleringsoppgåver, og kan derfor vere nyttige å kjenne til for å kunne legge til rette for undervisning av matematisk modellering i klasserommet. Vi vil presentere eksempel på slike *handlingar* seinare i kapittelet.

Matematisk modellering i undervisninga

I læreplanen LK20 er *modellering og anvendingar* eitt av seks kjerneelement. I dette kjerneelementet er ein matematisk modell definert som ei beskriving av verkelegheita i matematisk språk, og modellering handlar om å lage slike modellar (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 2). *Anvendingar* «handlar om at elevane skal få innsikt i korleis dei skal bruke matematikk i ulike situasjonar, både i og utanfor [matematikk]faget» (Kunnskapsdepartementet, 2019, s. 3). Rekning som grunnleggande ferdigheit er også knytt til matematisk modellering, og dei ulike ferdigheitsområda i rammeverket for rekning som grunnleggande ferdigheit har ein sterk samanheng med ulike steg i modelleringsprosessen (Bolstad, 2020). Rekning er ei av dei fem grunnleggande ferdigheitene som elevane skal utvikle gjennom heile opplæringsløpet, og som skal gjennomsyre alle faga i skulen. Omgrepet modellering blir også eksplisitt brukt i kompetansemål og vurdering på ulike trinn, i tillegg finn ein kompetansemål som kan knytast til ulike delar av modelleringsprosessen utan at ordet modellering blir brukt (Bolstad, 2020).

Oppgåve 8

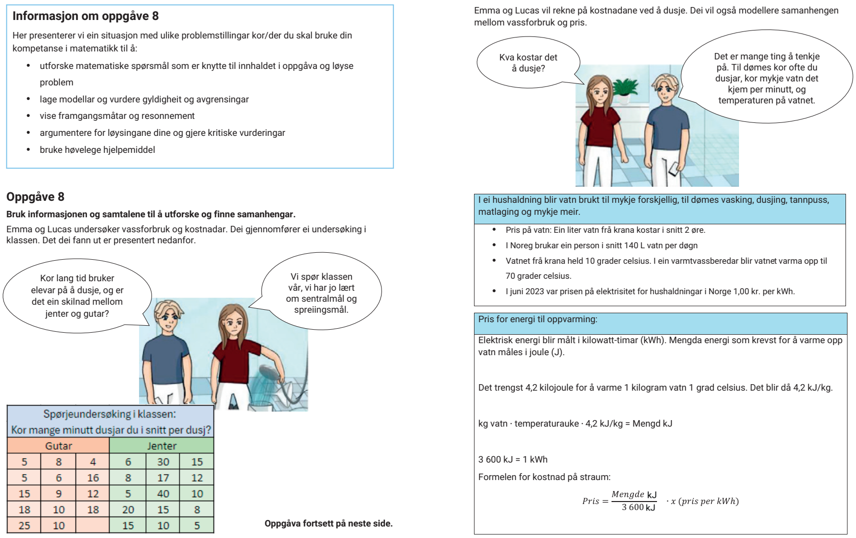
Sjå eksamensinformasjon s.2 for tips om korleis du kan vise kompetanse i oppgåve 8. **Bruk tabellen og utsegnene nedanfor til å vise din kompetanse innan modellering og anvending.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe ein brukt mopedbil. Ho planlegg å eige bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førarkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra køyretime, pris per time	850 kr
Vegavgift	470 kr
Sparepengar	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil

Figur 7. Eksamensoppgåve i matematikk 10. trinn våren 2023, oppgåve 8, del 2, henta frå udir.no

Modellering har òg vore synleg i eksamensoppgåver etter at LK20 vart innført. Eit eksempel på dette er oppgåva i figur 7 som vart gitt på eksamen for 10. trinn våren 2023, der elevane er bedne om å vise sin kompetanse innanfor *modellering og anvending*. Ut frå oppgåveteksta kan det verke som hensikta med eksamensoppgåva er at elevane skal vise sin kompetanse innanfor alle delar av modelleringsprosessen. I eksamensinformasjonen er det anbefalt at elevane bruker om lag 60 minutt til saman på denne og ei anna tilsvarande omfattande oppgåve.



Informasjon om oppgåve 8

Her presenterer vi ein situasjon med ulike problemstillingar kor/der du skal bruke din kompetanse i matematikk til å:

- utforske matematiske spørsmål som er knytte til innhaldet i oppgåva og løyse problem
- lage modellar og vurdere gyldigheit og avgrensingar
- vise framgangsmåtar og resonnement
- argumentere for løysingane dine og gjere kritiske vurderingar
- bruke høvelege hjelpemiddel

Oppgåve 8

Bruk informasjonen og samtalene til å utforske og finne samanhengar.

Emma og Lucas undersøker vassforbruk og kostnadar. Dei gjennomfører ei undersøking i klassen. Det dei fann ut er presentert nedanfor.

Kor lang tid bruker elevar på å dusje, og er det ein skilnad mellom jenter og gutar?

Vi spør klassen vår, vi har jo lært om sentralmål og spreiingsmål.

Spørjeundersøking i klassen: Kor mange minutt dusjar du i snitt per dusj?					
Gutar			Jenter		
5	8	4	6	30	15
5	6	16	8	17	12
15	9	12	5	40	10
18	10	18	20	15	8
25	10		15	10	5

Oppgåva fortsett på neste side.

Emma og Lucas vil rekne på kostnadane ved å dusje. Dei vil også modellere samanhengen mellom vassforbruk og pris.

Kva kostar det å dusje?

Det er mange ting å tenkje på. Til dømes kor ofte du dusjar, kor mykje vatn det kjem per minutt, og temperaturen på vatnet.

I ei hushaldning blir vatn brukt til mykje forskjellig, til dømes vasking, dusjing, tannpuss, matlaging og mykje meir.

- Pris på vatn: Ein liter vatn frå krana kostar i snitt 2 øre.
- I Noreg brukar ein person i snitt 140 L vatn per døgn
- Vatnet frå krana held 10 grader celsius. I ein varmtvassberedar blir vatnet varma opp til 70 grader celsius.
- I juni 2023 var prisen på elektrisitet for hushaldningar i Norge 1,00 kr. per kWh.

Pris for energi til oppvarming:

Elektrisk energi blir målt i kilowatt-timar (kWh). Mengda energi som krevst for å varme opp vatn måles i joule (J).

Det trengst 4,2 kilojoule for å varme 1 kilogram vatn 1 grad celsius. Det blir då 4,2 kJ/kg.

kg vatn · temperaturauke · 4,2 kJ/kg = Mengd kJ

3 600 kJ = 1 kWh

Formelen for kostnad på straum:

$$Pris = \frac{Mengde\ \text{kJ}}{3\,600\ \text{kJ}} \cdot x\ (pris\ per\ kWh)$$

Figur 8. Eksamensoppgåve matematikk 10. trinn våren 2024, oppgåve 8 del 2. Henta frå udir.no

Også våren 2024 var modellering inkludert i eksamen etter 10. trinn (sjå figur 8). Denne oppgåva er noko ulik eksamensoppgåva i figur 7. For det første er det ikkje uttrykt at elevane skal vise sin modelleringskompetanse, men at dei mellom anna skal vise sin matematiske kompetanse knytt til å lage modellar og vurdere gyldigheit og avgrensingar. I tillegg skal også kjerneelementa utforsking og problemløysing, og resonnering og argumentasjon inngå i vurderinga av denne oppgåva. Det er ikkje uttrykt eit spesifikt spørsmål som elevane skal finne svar på i oppgåvene, men spørsmål er formulerte i snakkebobler på bilda. I den første snakkebobla, som vi vil kalle a), står det «Kor lang tid bruker elevane på å dusje, og er det ein skilnad mellom jenter og gutar?», i snakkeboble b) er spørsmålet «Kva kostar det å dusje?». Dette spørsmålet er nesten identisk med spørsmålet vi stilte i figur 1, «Kva kostar det å ta ein dusj?», men elles ser oppgåvene svært ulike ut. Vi kjem tilbake til eksamensoppgåvene seinare i kapittelet.

Men kvifor har matematisk modellering fått ein så sentral plass i matematikkfaget? Ifølgje Niss og Blum (2020) er det fleire grunnar til dette, og desse kan delast i to hovudmål. Ein kan enten sjå det slik at ein arbeider med *matematikk for modelleringa sin del*, eller at ein arbeider med *modellering for matematikken sin del.* Det eine målet utelukkar ikkje det andre, for ei enkelt modelleringsoppgåve kan føre til at ein utviklar seg innanfor begge måla (Niss & Blum, 2020). Om ein arbeider innanfor det første målet, ser ein på modellering som ein viktig del av det å kunne matematikk og å bruke matematikk i kvardagsliv og samfunn. Her er det lagt vekt på at utgangspunktet er eit problem frå ein konkret autentisk situasjon som ein kan løyse ved hjelp av matematikk. Ein bør då arbeide med oppgåver der ein tek utgangspunkt i aktuelle saker, som for eksempel dusj-oppgåva i figur 1. Den frigitte PISA-oppgåva i figur 6 er uttrykt i ein vitskapleg kontekst, og ein ser at matematikk er nyttig for å beskrive noko i verdsrommet. Om ein arbeider med *modellering for matematikk sin del,* er hovudmålet å lære matematikk, mens å kunne bruke matematikk i kvardagsliv og arbeidsliv er mindre vektlagt. Då kan ein forsvare å jobbe med oppdikta og konstruerte kontekstar der det er gitt kva matematisk område ein skal operere i. Når grunnane til å arbeide med modellering er ulike, kan matematisk modellering sjå forskjellig ut i klasserommet.

Når ein arbeider med matematikk for modelleringa sin del er det viktig at elevane blir utfordra til å takle rotete kvardagsproblem, der mykje av jobben er å strukturere og forenkle problemet. Det vil elevane i liten grad erfare dersom oppgåvene dei møter ikkje involverer prematematisering, men allereie er strukturerte og forenkla. Studiar har vist at den første delen av modelleringsprosessen i liten grad blir inkludert i oppgåver i lærebøker og eksamenar, både i Noreg (Berget, 2022) og i andre land (Frejd, 2011; Gatabi et al., 2012; Jessen & Kjeldsen, 2021; Urhan & Dost, 2018). Oppgåver formulerte i autentiske kontekstar som i utgangspunktet er rotete og «opne» er ofte brotne ned i deloppgåver, noko som strukturerer og forenklar problemet. Eit eksempel på dette er om dusj-oppgåva i figur 1 heller blir gitt som vist i figur 9. Her får elevane all informasjon dei treng for å løyse oppgåva, og ho er formulert med fleire lukka deloppgåver. Viss elevane berre møter oppgåver der all informasjonen er gitt og strukturert og nødvendige forenklingar er gjort, får dei ikkje moglegheita til å utvikle ein heilskapleg modelleringskompetanse.

Gå ut frå at ein bruker omtrent 5 kWh straum for å varme opp vatnet ein bruker om ein dusjar i 10 minutt, og at straumprisen er 1 kr pr kWh.

a) Kva kostar det å dusje i 10 minutt?
b) Set opp eit uttrykk for $P(x)$ der P er prisen for ein dusj og x er kor mange minutt ein dusjar.
c) Teikn grafen til $P(x)$ når $0 \leq x \leq 30$.
d) Bruk grafen til å finne ut kor lenge ein kan dusje for 15 kroner.

Gå heller ut frå at straumprisen var 1,50 kr pr. kWh.

e) Set opp eit uttrykk for $Q(x)$, ny pris for ein dusj, der x er kor mange minutt ein dusjar.
f) Kor lenge kan ein no dusje for 15 kroner?

Figur 9. Ein annan versjon av dusj-oppgåva i figur 1, broten ned i deloppgåver som strukturerer og forenklar problemet

Dei ulike modelleringssyklusane er teoretiske modellar for kva steg ein går gjennom når ein løyser eit kvardagsleg problem, og kan vere ei hjelp for å få oversikt over kva som ligg i arbeid med matematisk modellering. Men dei seier ikkje noko om korleis ein lærar skal gå fram for å velje eller lage modelleringsoppgåver til elevane eller legge opp undervisninga slik at elevane utviklar modelleringskompetanse. Sjølv om matematisk modellering er ein tydeleg del av læreplanen LK20, kjem det ikkje fram i læreplanen kva ein skal legge vekt på i dette arbeidet (Berget & Bolstad, 2019). Å arbeide med matematisk modellering krev solid matematisk kompetanse i tillegg til motivasjon og vilje til å arbeide med denne typen oppgåver (Niss & Blum, 2020). Matematisk modellering kan også bryte med forventningar elevane har, dersom dei for eksempel er vande med at ei matematikkoppgåve skal kunne løysast på nokre minutt, at all nødvendig informasjon er gitt, at oppgåva berre har eitt rett svar, eller at ein ikkje for alvor treng å ta omsyn til konteksten oppgåva er formulert i (Lesh & Zawojewski, 2007). Det er også ein føresetnad at læraren har kunnskap om og kompetanse i matematisk modellering, for eksempel å kjenne til modelleringssyklusar og modelleringsoppgåver, kunne løyse, analysere og lage modelleringsoppgåver, planlegge og gjennomføre undervisning med modelleringsoppgåver og kjenne igjen når elevane arbeider med og strever med ulike delar i modelleringssyklusen (Borromeo Ferri, 2018). I tillegg må læraren ha kjennskap til konteksten oppgåva er formulert i (Blum, 2015).

Matematisk modellering kan vere krevjande å implementere i undervisninga, og den første delen spesielt. Det kan vere uvant for både lærarar og elevar at ei oppgåve ikkje inneheld all informasjonen som er nødvendig for å løyse oppgåva, eller at oppgåva inneheld overflødig og irrelevant informasjon (Niss & Blum, 2020). Det kan også vere uvant at konteksten er viktig for å forstå og løyse oppgåva og ikkje berre er «til pynt», og at elevane sjølve må gjere forenklingar eller bestemme føresetnader for vidare arbeid med oppgåva. For eksempel fann Jankvist og Niss (2020) at den viktigaste grunnen til feilsvar frå elevar ikkje var matematiske feil, men at dei ikkje klarte å omsetje frå den verkelege situasjonen til ein eigna matematisk modell. Språkleg kompleksitet i ei oppgåve kan gjere det vanskeleg å forstå situasjonen (Plath & Leiss, 2018). Frejd og Ärlebäck (2011) fann at elevar strevde med å gjere forenklingar for å gå frå det opphavelege problemet til ein matematisk modell. I ein studie av feilsvar frå elevar i ei tidlegare PISA-undersøking, viste resultata at det oftast var å skape meining i situasjonen oppgåva var presentert i, og å gjere det om til eit matematisk problem som var utfordringa (Wijaya et al., 2014). Dette peikar på at ein i undervisninga i større grad bør gi elevane moglegheit til å lære seg å handtere utfordringane i denne første delen av modelleringsprosessen, overgangen frå eit kaotisk kvardagsproblem til eit matematisk problem. Dette er nødvendig for å utvikle modelleringskompetanse slik at dei i framtida kan bruke matematikk for å løyse problem frå kvardagsliv og yrkesliv.

Vår studie

I denne studien ville vi utvikle eit analyseskjema for å identifisere ulike utfordringar i oppgåver knytte til den første delen av modelleringsprosessen. Analyseskjemaet er utvikla basert på *handlingane* knytte til å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket og to andre skildringar av modelleringsprosessen, Blum og Leiss (2007) og Frejd (2011). Vidare bruker vi skjemaet til å analysere dei 48 PISA-oppgåvene som er plasserte under å *kjenne igjen og formulere* i PISA 2022, for å undersøke kva utfordringar frå den første delen av matematisk modellering elevane møter i PISA-undersøkinga. Problemstillinga vår er formulert slik:

Kva blir elevane utfordra i når dei løyser oppgåver knytte til *å kjenne igjen og formulere* i PISA?

Resultata frå denne analysen kan hjelpe oss å forstå kva som ligg bak PISA-resultata knytte til å *kjenne igjen og formulere*. *Handlingane* er skildra i PISA-rammeverket, og ved denne analysen kan vi få innsikt i kva som faktisk blir testa. Vi vil også bruke analyseskjemaet til å diskutere utfordringane i to eksamensoppgåver for 10. trinn frå 2023 (sjå figur 7) og 2024 (sjå figur 8) og på den måten gjere betre greie for resultata i analysen vår.

Ved å beskrive oppgåvene som er knytte til ulike analysekategoriar, får vi eksempel på korleis modelleringsoppgåver kan vere utforma. Det blir også tydelegare kva som ligg i den første delen av modelleringsprosessen. Vidare trur vi at eit slikt skjema også kan vere nyttig for lærarar som støtte for å reflektere over og vurdere korleis oppgåver utfordrar elevane i å omsette eit kvardagsproblem til eit matematisk problem.

Metode

Utforming av analyseskjema

Vi utvikla analyseskjemaet til bruk i denne studien med bakgrunn i modelleringssyklusen til Blum og Leiss (figur 3) og operasjonaliseringa av stega i modelleringsprosessen skildra av Frejd (2011), i tillegg til *handlingane* innanfor steget *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket.

Å *kjenne igjen og formulere* er altså knytt til første del i modelleringsprosessen, at problemet blir formulert ved hjelp av matematisk språk (steg 1, 2 og 3 i modelleringssyklusen i figur 3). I PISA-rammeverket er dette skildra gjennom tolv *handlingar* som uttrykker kva elevane blir utfordra på i *kjenne igjen og formulere*-oppgåvene. Desse er viste i tabell 1.

Tabell 1. Dei tolv «handlingane» i prosessen «kjenne igjen og formulere» i PISA 2022 (OECD, 2023a, s. 45). Omsett av oss

a	Velje matematisk uttrykk eller representasjon som skildrar problemet.
b	Identifisere viktige variablar i ein modell.
c	Velje passande representasjon som passar til konteksten.
d	Lese, dekode og finne meining i påstandar, spørsmål, oppgåver, objekt eller bilde for å lage ein modell av situasjonen.
e	Kjenne igjen matematisk struktur i problem eller situasjonar (inkludert regelmessigheit, relasjonar og mønster i problem eller situasjonar).
f	Identifisere og skildre dei matematiske aspekta og variablar i den praktiske situasjonen.
g	Forenkle eller dekomponere situasjonen og splitte opp problemet for å gjere matematisk analyse mogleg.
h	Kjenne igjen delar av problemet som korresponderer med kjente problem eller matematiske omgrep, fakta eller prosedyrar.
i	Omsetje eit problem til standard matematisk representasjon eller algoritme.
j	Bruke matematiske verktøy (bruke variablar/symbol/diagram) for å skildre matematiske strukturar og/eller samanhengar i problemet.
k	Bruke matematiske verktøy eller digitale verktøy til å sjå/utforske/skildre matematiske samanhengar.
l	Identifisere avgrensingar, forenklingar og føresetnader som ligg til grunn i ein matematisk modell.

Frejd (2011) har i sin studie utforma hjelpespørsmål for å kunne kategorisere matematikkoppgåver opp mot ulike steg i modelleringsprosessen. Dei fem første kategoriane er knytte til første delen av prosessen, og desse hjelpespørsmåla er utforma slik:

1. Må elevane gjere forenklingar og sjølve bestemme føresetnader i problemsituasjonen for å løyse problemet?
2. Basert på den reelle situasjonen, må elevane klargjere kva dei vil oppnå med den matematiske modellen? (Er det uklart i oppgåva kva informasjon og kva samanhengar som er mest relevante for å formulere ein matematisk modell?)
3. Må elevane gjennomføre simuleringar eller vurdere slike for å setje seg inn i problemet?
4. Må elevane definere variablar, parameterar eller konstantar for å løyse problemet?
5. Må elevane sjølve setje opp eit matematisk formulert uttrykk (matematisk modell) for å beskrive problemet?

Vi kopla desse kategoriane frå Frejd til dei første stega i modelleringssyklusen til Blum og Leiss (sjå figur 3) og *handlingane* under å *kjenne igjen og formulere* i PISA-rammeverket. Vi kom då fram til fire ulike kategoriar. Kategori A handlar om å gjere forenklingar og bestemme føresetnader, kategori B handlar om å identifisere og strukturere informasjon, kategori C handlar om å lage eit matematisk uttrykk (ein modell), og kategori X handlar om å bruke simuleringar og andre verktøy. Tabell 2 viser dei fire kategoriane og samanhengen med PISA-handlingane, kategoriane til Frejd og stega i modelleringssyklusen til Blum og Leiss.

Tabell 2. Kategoriane i førsteutkastet av analyseskjema, «handlingane» i PISA-prosessen «kjenne igjen og formulere», dei første fem kategoriane i Frejds rammeverk og steg i modelleringsprosessen til Blum og Leiss frå figur 3 sett i samanheng

Våre kategoriar	PISA-handlingar	Frejd	Blum og Leiss
A	g	1	1, 2
B	b, d, e, f, h,	2, 4	2, 3
C	a, c, i, l	5	3
X	k, j	3	

Etter å ha testa analyseskjemaet på åtte oppgåver frå PISA 2012 kom vi fram til at det var nødvendig med nokre endringar i kategoriane. For det første såg vi på det å bruke verktøy (kategori X) som noko ein kan gjere i alle delar av modelleringsprosessen, og vi valde derfor å halde denne kategorien utanfor i den vidare analysen. I tillegg fann vi at kategori B, som handla om både å identifisere og å strukturere informasjon, kunne vere nyttig å skilje i to kategoriar i analysen av oppgåvene. Dette resulterte i B1 (identifisere informasjon) og B2 (strukturere informasjon). Når det gjeld kategori C, som handlar om å velje eller lage ein matematisk modell, ville vi skilje det å lage ein modell frå å gjere ei vanleg utrekning. Vi bestemte at alle oppsett og utrekningar der det verken eksplisitt eller implisitt var oppgitt i oppgåveteksta kva operasjon elevane skulle bruke, vart vurderte som å lage ein modell. I tillegg vart å velje passande modell i fleirvalsoppgåver også sett på som å lage ein matematisk modell. Spørsmålet «kva er ein matematisk modell?» vil vi kome tilbake til seinare i kapittelet.

I den neste utprøvinga av skjemaet analyserte kvar av forfattarane 10 av dei 48 oppgåvene i datamaterialet og diskuterte desse. Det viste seg å vere utydeleg skilje mellom kategori B2 og C. Vi endra beskrivinga av kategoriar for å presisere at kategorien B2 inkluderer å finne mønster i informasjonen som allereie er oppgitt, mens kategori C inkluderer utrekningar. Vi presiserte også med eksempel kva som var med i C, og kva som ikkje vart rekna som C. Det endelege analyseskjemaet er vist i tabell 3.

Tabell 3. Endeleg analyseskjema med forklaring av dei fire kategoriane

	Beskriving av kategoriar
A	**Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader** Forenkling er at elevane ser vekk frå variasjonar, for eksempel at dei bestemmer seg for å bruke ein gjennomsnittleg verdi. Å bestemme føresetnader er at dei anslår noko, for eksempel ei høgd til noko på eit bilde ut frå å samanlikne med noko på bildet som dei kjenner høgda til. Ei oppgåve krev *ikkje* dette når det er oppgitt korleis ein skal forenkle, eller når det ikkje trengst forenkling, og når føresetnadene er gitt i oppgåva.
B1	**Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar** Elevane må finne ut kva informasjon som er nødvendig for å løyse problemet, det kan vere å skilje mellom relevant og irrelevant informasjon. Elevane må definere variablar, parameterar og konstantar for å løyse problemet. Ei oppgåve krev *ikkje* dette når nøkkelvariablane og all nødvendig informasjon er gitt og oppgåva ikkje inneheld noko irrelevant informasjon, eller det er tydeleg ut frå oppgåva kva informasjon som er relevant, og kva som er irrelevant.

(*Forts.*)

Tabell 3. (*Forts.*)

	Beskriving av kategoriar
B2	**Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar** Elevane må kjenne igjen matematisk struktur i problemet eller situasjonen. Dette kan også innebere å kunne sjå korleis matematisk kunnskap (omgrep, fakta eller prosedyrar) kan bli brukte i den gitte situasjonen, for eksempel å kjenne igjen situasjonar der ein kan bruke Pytagoras-setninga. Ei oppgåve krev *ikkje* dette når det er tydeleg kva matematisk kunnskap ein skal bruke, og når informasjonen i oppgåva er presentert på ein strukturert måte som gjer det enkelt å knyte saman dei ulike delane eller stega som er nødvendige for å løyse oppgåva.
C	**Lage ein matematisk modell** Elevane må sjølve finne ut av den matematiske modellen. Ein matematisk modell kan for eksempel vere ein (standard-)algoritme (utrekning), eit uttrykk eller ein representasjon. Å velje ein modell i form av fleirvalsoppgåve er også her definert som å lage ein modell. Ei oppgåve krev *ikkje* dette når den matematiske modellen er gitt frå før, for eksempel at oppgåveteksta gir tydeleg informasjon om kva ein skal gjere (finne gjennomsnitt, prosentrekning, bruke Pytagoras-setninga), når ein formel er oppstilt og elevane berre skal fylle inn tal, eller når oppgåva berre krev at ein vekslar mellom ulike matematiske representasjonsformer.

Analyse av PISA-oppgåver

For å undersøke oppgåvene som skal teste elevane i den første delen av modelleringsprosessen, analyserte vi dei 48 *kjenne igjen og formulere*-oppgåvene i PISA 2022 ved hjelp av analyseskjemaet som er vist i tabell 3. For å styrke og å kunne vurdere pålitelegheita i analyseverktøyet og kodinga vart kvar av oppgåvene analysert av minst to av forfattarane. 10 av oppgåvene vart analyserte av alle tre, og dei 38 andre vart analyserte av to og to av forfattarane. Samsvaret mellom koderane vart rekna ut (sjå tabell 4). For dei oppgåvene der vi var ueinige om kodinga av ein eller fleire av kategoriane, diskuterte alle tre forfattarane til vi vart einige. Vi noterte ned argument for ulik koding og tok med oss desse innspela vidare i diskusjonen i dette kapittelet. Ei utfordring med analysen av oppgåvene var at vurdering av kva for kategoriar som inngår, er avhengig av kva løysingsmetode som blir brukt av elevane. I kodinga av oppgåvene vart løysingmetodar ein kan tenke seg at 15-åringar ville ha brukt, lagt til grunn.

Kodesamsvar

Vi berekna kodesamsvar for å undersøke kor einige vi tre forfattarane var om kva for nokre av dei fire kategoriane som var inkluderte i dei ulike oppgåvene vi analyserte. Samsvaret mellom kodarane gir ein indikasjon på at analysen og tolkinga som er gjort av matematikkoppgåvene, ville ha vore den same om det vart gjort av andre (O'Connor & Joffe, 2020). Kodesamsvaret kan også gi informasjon om eit analyseskjema er strengt og gjennomsiktig, og kor godt det fungerer med dataa som blir analyserte (O'Connor & Joffe, 2020). Å gjere greie for desse verdiane kan styrke pålitelegheita til resultata. Sidan dei fleste oppgåvene var koda av to kodarar, med dikotome kategoriar (ja eller nei), vart kodesamsvar berekna med Cohens kappa (Cohen, 1960) for kvart par av kodarane. I tolkinga av kappaverdiane kan 0–0,20 vurderast som svakt samsvar, 0,21–0,40 som noko samsvar, 0,41–0,60 som moderat samsvar, 0,61–0,80 som betydeleg samsvar og 0,81–1,00 som nesten perfekt samsvar (Landis & Koch, 1977). Verdien for samsvaret i kodinga er presentert i tabell 4. For kodinga totalt, det vil seie samla sett for alle dei fire kategoriane, var det frå moderat til betydeleg samsvar mellom forfattarane. Det var fullstendig samsvar i kategori A og derfor ikkje mogleg å rekne ut ein verdi for berre denne kategorien. For kategori B1 var det moderat samsvar for to par av forfattarane, men svakt samsvar for det tredje paret. Ei forklaring på det låge samsvaret mellom forfattar B og C kan vere knytt til ulike oppfatningar om når informasjon som er gitt i oppgåva, skal vurderast som irrelevant. For kategori B2 var det frå noko til moderat samsvar. Ei utfordring med denne kategorien var å vurdere når ei oppgåve var tilstrekkeleg ustrukturert til å hamne i kategori B2. Dei ulike verdiane mellom forfattarane i tabell 4 tyder på at dette vart vurdert noko forskjellig. Det relativt låge samsvaret for kategori C mellom nokre av forfattarane kjem i stor grad av ueinigheit knytt til om det er opplagt ut frå oppgåva korleis den matematiske modellen skal bli utforma, eller om ein kan seie at oppgåva krev at elevane sjølve må lage ein

Tabell 4. Samsvar mellom analysen av dei 48 PISA-oppgåvene i kategorien «kjenne igjen og formulere» rekna ut med Cohens kappa. Tabellen viser samsvaret mellom to og to av forfattarane. Verdiane i parentes viser p-verdiane. P-verdiar under 0,05 betyr at kappa-verdien er statistisk signifikant større enn 0 på eit 5 prosent signifikansnivå. Det var fullstendig samsvar i kodinga av kategori A og derfor ingen verdiar i den kolonnen

	Totalt	A	B1	B2	C
Forfattar X og Y	0,626 (<0,001)	–	0,430 (0,031)	0,514 (0,015)	0,611 (0,006)
Forfattar X og Z	0,455 (<0,001)	–	0,571 (0,003)	0,349 (0,055)	0,195 (0,299)
Forfattar Z og Y	0,455 (<0,001)	–	0,194 (0,108)	0,408 (0,045)	0,256 (0,202)

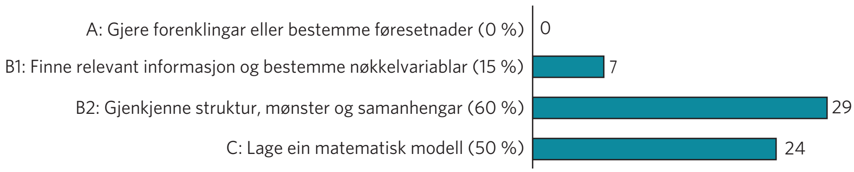
modell. Nokre av grunnane til låge samsvar blir diskuterte seinare i kapittelet. Dei høge p-verdiane i dei enkelte kategoriane er påverka av at det var forholdsvis få oppgåver som vart koda for kvart forfattarpar.

Analyse av eksamensoppgåver

For å belyse resultata frå analysane av PISA-oppgåver ville vi også anvende analyseskjemaet vårt på oppgåver som lærarar kjenner til, eksamensoppgåver frå eksamen på 10. trinn i 2023 (figur 7) og 2024 (figur 8). Dette er oppgåver dei fleste elevane på 10. trinn vil få introdusert, og det er den same elevgruppa som gjennomfører PISA-undersøkinga (15-åringar). Resultatet av analysen av desse eksamensoppgåvene blir presenterte etter resultatet frå analysen av PISA-oppgåvene. Vi tolka mopedbil-oppgåva som ei oppgåve, og dusjetid og dusjepris-spørsmålet i den andre eksamensoppgåva som to deloppgåver.

Kva for utfordringar fann vi i PISA-oppgåvene?

Figur 10 viser resultatet av analysen av dei 48 oppgåvene knytte til prosessen *kjenne igjen og formulere* i PISA 2022. Her ser vi kor mange av oppgåvene som vart vurderte til å inkludere dei ulike kategoriane i analyseverktøyet vårt. Summen av dei fire kategoriane er meir enn 100 prosent, sidan nokre oppgåver involverte fleire av kategoriane.



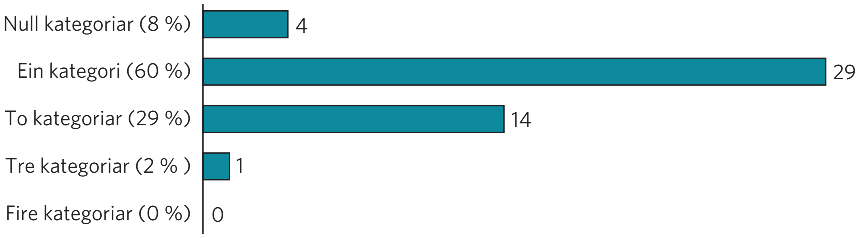
Figur 10. Tal på kor mange oppgåver i kvar av analysekategoriane og som prosent av det talet på oppgåver totalt

Som ein kan sjå i figur 10 fann vi tre av dei fire kategoriane i oppgåvene, der å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar (B2) og å lage ein matematisk modell (C) var inkludert i flest oppgåver. Å gjere forenklingar eller bestemme føresetnader (A) vart ikkje funne i nokon av oppgåvene. Det vil seie at ut frå våre analyser av dei 48 oppgåvene innanfor å *kjenne* *igjen og formulere*, blir ikkje elevane testa i handling g) å «forenkle eller dekomponere situasjonen og splitte opp problemet for å gjere matematisk analyse mogleg». Svaret på Frejd sitt hjelpespørsmål 1, «Må elevane gjere forenklingar og sjølv bestemme føresetnader i problemsituasjonen for å løyse problemet?», var altså «nei» for alle desse PISA-oppgåvene.

Det var relativt få oppgåver som vart plasserte i kategori B1, å kunne skilje ut relevant informasjon som trengst for å løyse oppgåva. Der var stor overvekt av kategori B2 og C. Dei fleste oppgåvene innanfor desse kategoriane har eit svarformat der elevane enten skal velje mellom fire verdiar (sjå oppgåva «trekanta mønster» i figur 12) eller setje inn rett verdi i eit ope felt. For eksempel kan ei oppgåve krevje at elevane må bruke Pytagoras-setninga for å kome fram til svaret, men elevane blir ikkje bedne om å vise utrekninga og dermed ikkje modellen dei har brukt. Elevane gir altså eit svar dei får i utrekningane sine der dei har brukt ein modell. Berre tre av oppgåvene har eit svarformat der elevane sjølve må uttrykke ein matematisk modell, for eksempel ved eit matematisk uttrykk med variablar.

I analysen av oppgåvene var det mest usemje om kategori C. I diskusjonen i etterkant vart det klart at vi var usikre på om oppgåva kravde «nok» til at ein kunne seie at elevane sjølve kom fram til den matematiske modellen, eller om den matematiske modellen allereie var gitt i oppgåveteksta. Eksempel på dette er om det i oppgåveteksta er formuleringar som «kor mange per dag?». Er det då heilt opplagt at ein må ta den totale mengda som er gitt, og dele på talet på dagar som er gitt, eller er det krevjande nok til å seie at dette er å setje opp ein modell eller ei utrekning?

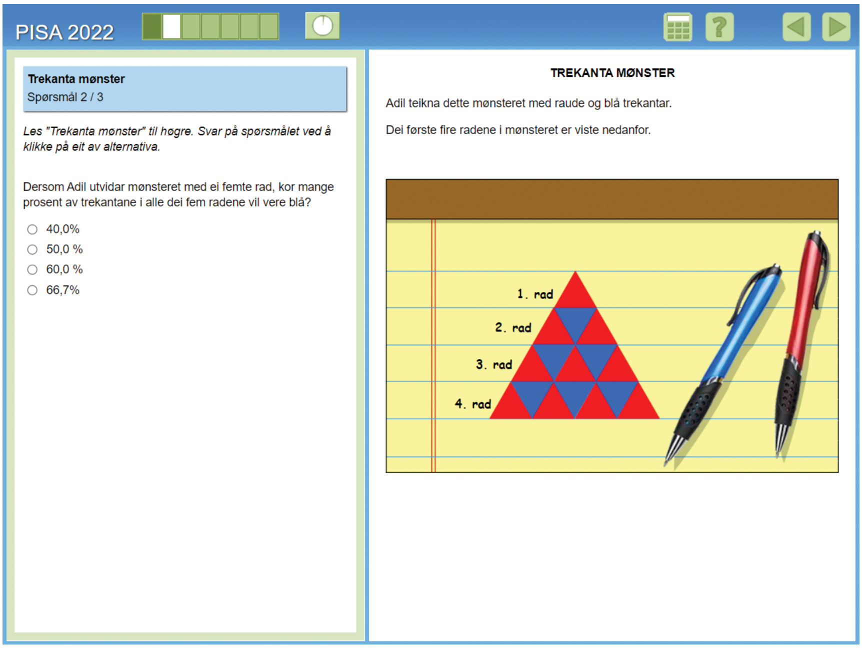
Vidare undersøkte vi kor mange kategoriar dei ulike oppgåvene inkluderte. Fordelinga er vist i figur 11. Nokre av oppgåvene inkluderte ingen av kategoriane i analysen vår. Dei fleste oppgåvene er koda til éin kategori, mens éi oppgåve inkluderte tre kategoriar.



Figur 11. Tal på oppgåver som inkluderte null, ein, to, tre eller fire kategoriar

For å kunne beskrive kva som blir vurdert i *kjenne igjen og formulere*-prosessen i PISA-undersøkinga, ville vi studere kva som kjenneteikna oppgåvene som var plasserte i kvar av kategoriane, og dei som var i fleire kategoriar. Det er berre nokre få av PISA-oppgåvene som er frigitt, vi har ikkje høve til å vise eksempel på alle typar oppgåver.

Det er frigitt ei PISA-oppgåve som vart koda til kategorien B2, så i figur 12 kan vi sjå eksempel på ei slik. Vi ser her at elevane må utvide mønsteret i trekanten, og dette inkluderer kategori B2, å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar. Vidare for å løyse oppgåva er det tilstrekkeleg å innsjå at det vil vere færre blå trekantar enn raude trekantar, altså er under 50 prosent av trekantane blå. Dermed er einaste moglege svaralternativ 40,0 prosent. Elevane kan også telje opp talet på raude og blå trekantar etter å ha lagt til ei rad, og rekne ut eksakt. Men sidan det er oppgitt at dei skal finne prosent blå trekantar, er det gitt at dei må gjere utrekninga $\frac{\#\text{blå trekantar}}{\#\text{trekantar totalt}}$, og vi vurderte det derfor slik at kategori C, å lage ein matematisk modell, ikkje var aktuell i denne oppgåva.

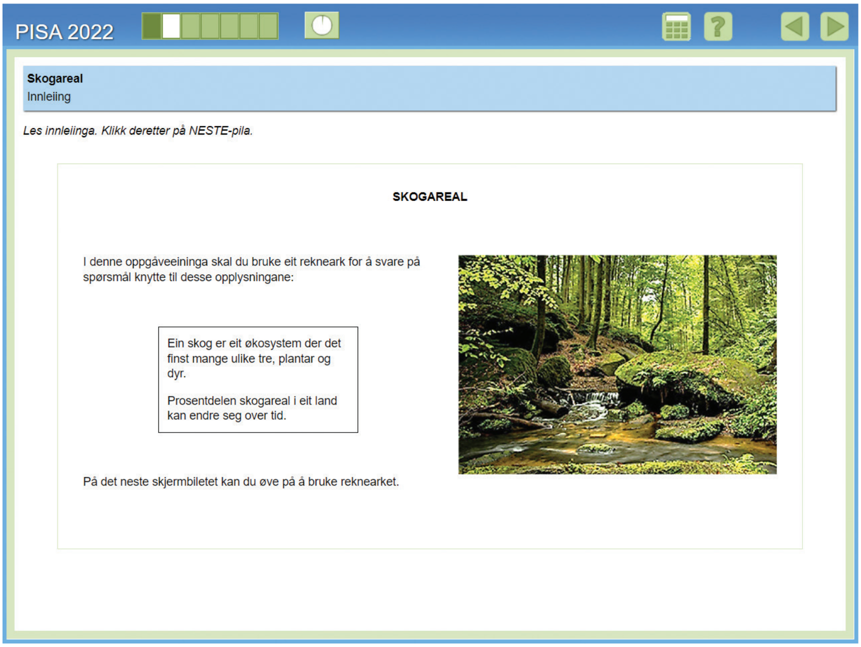


Figur 12. Frigitt oppgåve frå PISA 2022, «Trekanta mønster», kategorisert til B2, kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar

Det er også frigitt ei oppgåve som vi har vurdert til å inkludere kategori C, sjå figur 13. Her får elevane eit rekneark med informasjon, og dei får vite at dei kan «øve på å bruke reknearket». Det er fire oppgåver knytte til denne konteksten (skogareal), men det er berre den første oppgåva som er knytt til å *kjenne igjen og formulere* og dermed inkludert i datamaterialet i denne studien. Det er oppgitt i oppgåveteksta at elevane skal finne endring i prosentpoeng mellom 2005 og 2015, og det er dermed gitt kva informasjon dei skal nytte (kolonne B og kolonne D). Det vart derfor vurdert at elevane ikkje treng å finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar, og oppgåva er dermed ikkje koda som kategori B1. Ein kan diskutere kor opplagt det er for elevane at dei må finne differansen mellom prosent oppgitt for dei to årstala for å finne kva land som har «størst auke», «inga endring» og «størst nedgang» i prosentpoeng, altså velje *kolonne D – kolonne B* som formel i kolonne E. I denne oppgåva vurderte vi det til at det ikkje nødvendigvis er heilt opplagt for 15 år gamle elevar, og oppgåva inkluderer dermed kategori C, å lage ein matematisk modell. Vidare må elevane vurdere at det høgste positive talet i kolonne E er landet som har størst auke, og landet med det minste talet (som er negativt) har størst nedgang (størst negativ differanse). Det er eitt land som har like stor del skogareal for begge åra og dermed 0 i differanse, som er svaret på spørsmålet i midten.

Skogareal-oppgåva i figur 13 er også eit eksempel på grunn for diskusjon mellom forfattarane i analysearbeidet. Sidan reknearket inneheld meir informasjon enn det som trengst for å løyse denne oppgåva, som data frå 2010 i kolonne C, kan ein her argumentere for at elevane også må utføre kategori B1, å finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar. Men sidan det er oppgitt i spørsmålet kva årstal dei skal ta utgangspunkt i, vurderte vi det slik at dei ikkje sjølv trong avgjere kva for informasjon som var relevant og ikkje.

13 av dei 14 oppgåvene som vi plasserte i to kategoriar, har kombinasjonen B2 og C. I desse oppgåvene må elevane ikkje berre sjå mønster og system, men dei må også i nokre tilfelle uttrykke dette ved hjelp av ein formel. Eller dei må gjere utrekningar i tillegg for å kunne avgjere kva for slags svaralternativ som er det rette. Den siste av dei 14 oppgåvene med to kategoriar har B1 og C. Der må elevane både velje ut relevant informasjon og gjere ei utrekning ut frå ein modell dei sjølve må lage.



PISA 2022

Skogareal
Innleiing

Les innleiinga. Klikk deretter på NESTE-pila.

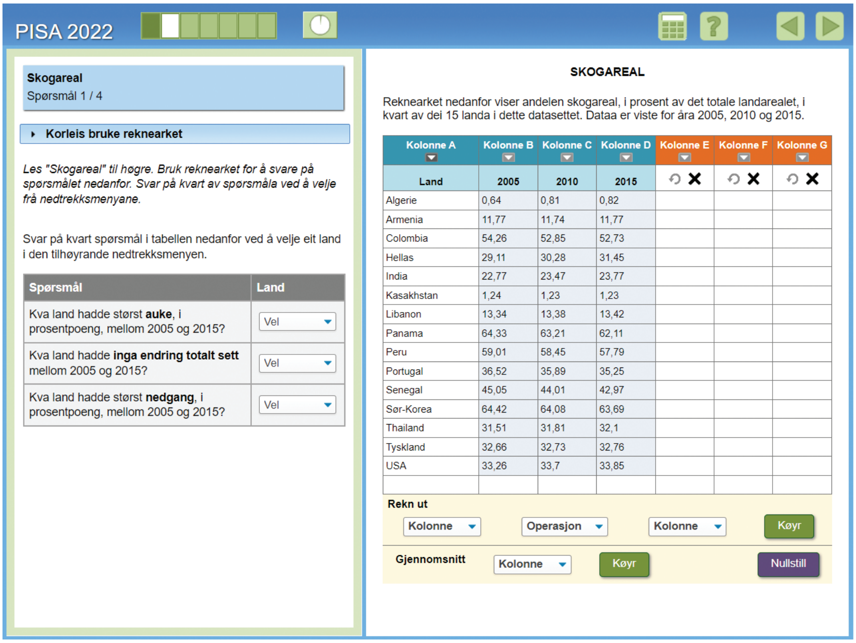
SKOGAREAL

I denne oppgåveeininga skal du bruke eit rekneark for å svare på spørsmål knytte til desse opplysningane:

Ein skog er eit økosystem der det finst mange ulike tre, plantar og dyr.

Prosentdelen skogareal i eit land kan endre seg over tid.

På det neste skjermbiletet kan du øve på å bruke reknearket.



PISA 2022

Skogareal
Spørsmål 1 / 4

Korleis bruke reknearket

Les "Skogareal" til høgre. Bruk reknearket for å svare på spørsmålet nedanfor. Svar på kvart av spørsmåla ved å velje frå nedtrekksmenyane.

Svar på kvart spørsmål i tabellen nedanfor ved å velje eit land i den tilhøyrande nedtrekksmenyen.

Spørsmål	Land
Kva land hadde størst **auke**, i prosentpoeng, mellom 2005 og 2015?	Vel
Kva land hadde **inga endring totalt sett** mellom 2005 og 2015?	Vel
Kva land hadde størst **nedgang**, i prosentpoeng, mellom 2005 og 2015?	Vel

SKOGAREAL

Reknearket nedanfor viser andelen skogareal, i prosent av det totale landarealet, i kvart av dei 15 landa i dette datasettet. Dataa er viste for åra 2005, 2010 og 2015.

Kolonne A	Kolonne B	Kolonne C	Kolonne D	Kolonne E	Kolonne F	Kolonne G
Land	**2005**	**2010**	**2015**			
Algerie	0,64	0,81	0,82			
Armenia	11,77	11,74	11,77			
Colombia	54,26	52,85	52,73			
Hellas	29,11	30,28	31,45			
India	22,77	23,47	23,77			
Kasakhstan	1,24	1,23	1,23			
Libanon	13,34	13,38	13,42			
Panama	64,33	63,21	62,11			
Peru	59,01	58,45	57,79			
Portugal	36,52	35,89	35,25			
Senegal	45,05	44,01	42,97			
Sør-Korea	64,42	64,08	63,69			
Thailand	31,51	31,81	32,1			
Tyskland	32,66	32,73	32,76			
USA	33,26	33,7	33,85			

Rekn ut
Kolonne — Operasjon — Kolonne — Køyr

Gjennomsnitt Kolonne — Køyr — Nullstill

Figur 13. Frigitt oppgåve PISA 2022, «Skogareal». Kategorisert til C, å lage ein matematisk modell

Fire av *kjenne igjen og formulere*-oppgåvene vart ikkje vurderte til å innehalde nokon av kategoriane vi brukte i analysen. I desse oppgåvene er framgangsmåten allereie gitt, for eksempel blir det spurt etter gjennomsnitt eller prosent. Vi undrar oss derfor på om desse oppgåvene heller burde vere knytte til prosessen *bearbeide og bruke* heller enn *kjenne igjen og formulere*. Elevane treng verken å vurdere kva informasjon dei skal bruke, eller kva framgangsmåte som må til for å løyse oppgåva, når alt dette er gitt. Dette kan tyde på at vi forfattarane av dette kapittelet har ulik oppfatning av utfordringane i desse oppgåvene og korleis dei er knytte til dei ulike stega i modelleringsprosessen, enn dei som har kategorisert oppgåvene for PISA.

Kva blir elevane utfordra på i eksamensoppgåvene?

Vi analyserte også eksamensoppgåvene i figur 7 og figur 8 for å kunne drøfte desse oppgåvene og resultatet frå analysen av PISA-oppgåvene. For oppgåva om mopedbilen i figur 7 kom vi fram til kategoriar slik det er vist i tabell 5.

Tabell 5. Analyseresultat av eksamensoppgåva i figur 7

A	Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader	Nei
B1	Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar	Nei
B2	Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar	Ja
C	Lage ein matematisk modell	Ja

Når det gjeld kategori A, å gjere forenklingar eller bestemme føresetnader, er dette allereie gjort i oppgåva. Det er oppgitt gjennomsnittsverdiar eller faste verdiar på dei relevante parameterane. Føresetnader er allereie bestemte, som rente på kontoen, årleg verditap på bilen, dieselpris og gjennomsnittleg køyrelengd per veke. Elevane skal ikkje finne relevant informasjon som skildra i kategori B1, for dei blir gitt all informasjon dei treng for å løyse oppgåva, og dei blir i liten grad gitt noko irrelevant informasjon. Det er ikkje oppgitt kor mange ekstra køyretimar som er forventa at jenta i oppgåva treng, og dermed er det opplagt at dette kan vere ein variabel. Dei kan også velje å gå ut frå at jenta ikkje treng ekstra køyretimar, og på den måten unngå å måtte setje opp eit uttrykk med variablar. Elevane må til ei viss grad sortere i korleis dei skal bruke den informasjonen som er gitt, så kategori B2, å kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar, er nødvendig for å løyse oppgåva. Dei må også finne ut av samanhengane mellom dei ulike verdiane som er oppgitt, og korleis desse påverkar prisen totalt. Dette inngår også i kategori B2. Vidare må elevane setje opp matematiske modellar som viser desse samanhengane. Oppgåva inkluderer altså også kategori C, å lage ein matematisk modell. Vår vurdering er at sjølv om det er lagt opp til at elevane skal bruke om lag 30 minutt på denne oppgåva, og at ho krev at dei sorterer mykje informasjon for å lage ein matematisk modell, er det fleire viktige delar av denne første delen av modelleringsprosessen som ikkje er involverte i oppgåva.

I den andre eksamensoppgåva (sjå figur 8) analyserte vi det vi tolka som spørsmål a) og spørsmål b), kvar for seg.

Tabell 6. Analyseresultat av eksamensoppgåva i Figur 8

		Oppgåve a)	Oppgåve b)
A	Gjere forenklingar eller bestemme føresetnader	Nei	Ja
B1	Finne relevant informasjon og bestemme nøkkelvariablar	Nei	Ja
B2	Kjenne igjen struktur, mønster og samanhengar	Nei	Nei
C	Lage ein matematisk modell	Nei	Nei

Vi vurderte det slik at spørsmål a), «Kor lang tid bruker elevar på å dusje, og er det ein skilnad mellom jenter og gutar?», ikkje inkluderer nokon av kategoriane frå analyseskjemaet (tabell 6). Vi tolka informasjonen i den andre snakkebobla, «Vi spør klassa vår, vi har jo hatt om sentralmål og spreiingsmål», slik at framgangsmåten for å svare på spørsmålet er gitt, og datasettet er gitt. Elevane treng derfor i spørsmål a) ikkje å gjere noko anna enn å rekne ut desse for å svare på spørsmålet.

I spørsmål b), «Kva kostar det å dusje?», er det meste av informasjonen gitt og også dei matematiske modellane elevane må bruke for å kome fram til eit svar. I formlane som er gitt i oppgåva, er den einaste informasjonen som manglar, kor mange kg vatn ein bruker, og kor stor temperaturauken er. I den andre snakkebobla på bildet er det føreslått kva vurderingar elevane må gjere: «Det er mange ting å tenke på. For eksempel kor ofte du dusjar, kor mykje vatn det kjem per minutt, og temperaturen på vatnet». Det er uklart for oss om det er forventa om elevane skal ha klart føre seg eit tal på kor mykje vatn det kjem per minutt når ein dusjar. Dette er det ikkje gitt noko informasjon om. Men sidan det er oppgitt kor mykje vatn ein person i gjennomsnitt bruker i døgnet, kan elevane heller bruke dette talet som utgangspunkt for å gjere ei vurdering av kor mykje vatn som blir brukt til dusjing. Då er i tilfelle svara frå oppgåve a) ikkje relevante for arbeid med oppgåve b). Når det gjeld temperaturendring, kan dei forenkle situasjonen og gå ut frå at dusjvatnet skal varmast opp frå 10°*C* til ønskt dusjtemperatur, i staden for å ta stilling til at blandebatteriet skal blande oppvarma vatn frå varmtvasstanken med kaldt for å oppnå rett temperatur. Då må elevane altså utføre kategori A, å forenkle og bestemme føresetnader, for å svare på spørsmål b). Dei må også vurdere kva slags informasjon dei vil ta omsyn til og bruke til å bestemme kg vatn og temperatur, kategori B1. Men dei må ikkje lage ein matematisk modell slik det er skildra i analyseskjemaet vårt. Dei matematiske samanhengane og formlane er allereie gitt. I vår analyse av oppgåva har vi tatt utgangspunkt i at dei fleste elevane vil gå ut frå at alt dusjvatnet vert varma opp, og at oppgåva dermed ikkje involverer kategori C. Dersom ein løyser denne oppgåva på andre måtar kan det involvere ulike prosessar. Viss elevane for eksempel tek omsyn til blandebatteriet og berre reknar på temperaturendring for vatnet frå varmtvasstanken, må dei lage ein modell for å finne ut av dette (kategori C). Det er også mogleg å lage eit uttrykk for dusjprisen som funksjon av tid (kor lenge ein dusjar), vassmengd og/eller temperaturen for vatnet. På denne måten vil alle dei fire kategoriane kunne vere relevante.

Diskusjon

Den viktigaste delen av matematisk modellering inneber å omforme og omsetje eit problem frå den verkelege verda til ei matematisk form, for vidare å kunne løyse problemet (Stillman, 2015). Resultata frå fleire studiar tyder på at det er lagt lite vekt på denne delen av matematisk modellering i matematikkoppgåver i lærebøker og på eksamen (Berget, 2022; Frejd, 2011; Gatabi et al., 2012; Jessen & Kjeldsen, 2021; Urhan & Dost, 2018), og at denne delen er utfordrande for elevar (Wijaya et al., 2014). Å gjere forenklingar og bestemme føresetnader er kanskje ikkje like opplagt ein del av matematikkfaget som å setje opp ei utrekning eller lage eit matematisk uttrykk. Som det er presisert i PISA-rammeverket frå 2012, er det i ein testsituasjon ikkje lagt til rette for å utfordre elevar til å gjennomføre heile modelleringsprosessen, men ulike oppgåver vil teste ulike delar (OECD, 2013). Oppgåvene knytte til å *kjenne igjen og formulere* skal til saman utfordre elevane på alle dei ulike *handlingane* som er skildra i tabell 1. At ingen av PISA-oppgåvene krev at elevane skal gjere forenklingar eller bestemme føresetnader, er derfor overraskande. Å gjere forenklingar er eksplisitt uttrykt som ein del av modelleringsprosessen i syklusen til Blum og Leiss, slik som vist i figur 3. Dersom elevar berre får oppgåver der forenklingar allereie er gjorde, vil dei ikkje få erfaringar dei treng for å løyse problemstillingar frå kvardagslivet. For å løyse den opne dusj-oppgåva i figur 1 er det å gjere forenklingar og bestemme føresetnader avgjerande for om ein klarer å kome vidare i prosessen. Ei hovudutfordring i matematisk modellering kan vere at ein ikkje veit korleis ein skal starte. Det er så mange ulike vegar ein kan gå, og ein har ikkje fått noko kompass å navigere med (Blomhøj & Jensen, 2003). Elevar må derfor få erfaring med å takle «rotete» kvardagssituasjonar i matematikkopplæringa for sjølve å kunne bruke matematikkunnskapane sine i livet (Boaler, 2001).

Det kan vere fleire moglege forklaringar på kvifor å forenkle og bestemme føresetnader ikkje er testa i PISA-oppgåvene. Ei årsak kan vere at det er vanskeleg å vurdere kva som er rett eller feil på slike oppgåver, og ei anna årsak kan vere at slike oppgåver kan krevje ikkje-matematiske kunnskapar. Dersom kjennskap til konteksten er avgjerande for at elevane klarer å løyse oppgåva, testar oppgåva også noko anna enn matematiske kunnskapar. For å gi eit eksempel på dette viser vi i figur 14 ei oppgåve som krev at elevane bestemmer ein føresetnad, nemleg kor mange publikummarar det er per kvadratmeter på ein utseld rockekonsert. Denne oppgåva vart brukt i utprøvinga til PISA 2003, men var ikkje med i sjølve undersøkinga.

ROCKEKONSERTEN

Oppgave 1: ROCKEKONSERTEN *M552Q01 - 0 1 9*

På en rockekonsert ble et rektangulært jorde på 100 m ganger 50 m satt av til publikum. Konserten var helt utsolgt, og jordet var fullt av stående fans.

Hvilket av alternativene under viser det mest sannsynlige antallet personer som hørte på konserten?

A 2 000
B 5 000
C 20 000
D 50 000
E 100 000

Figur 14. Tidlegare frigitt PISA-oppgåve frå utprøvingsfasen før PISA 2003

Det viste seg at det vanlegaste svaret i utprøvinga var alternativ B. Ei årsak kan vere at elevar ofte i tekstoppgåver der to tal er oppgitt, skal utføre ein rekneoperasjon. Sidan eitt av svaralternativa nettopp var produktet av dei to tala som var oppgitt i oppgåva, kan det vere ei årsak til at mange valde det svaret (Blum, 2015). I oppgåva var alternativ C meint som det mest sannsynlege, altså at det står fire personar per kvadratmeter. For å kunne gjere denne vurderinga må elevane ha erfaring med rockekonsertar, eller i alle fall ha sett bilde av ein slik rockekonsert. Viss ein tenker sikkerheit, burde det kanskje ha vore opne område på det rektangulære jordet, slik at vakter kunne kome seg rundt. Då er det i overkant tett med eit snitt på fire personar per kvadratmeter på det rektangulære området, særleg om det var gjerda inn og det var fare for klemskadar mot gjerdet. Slike vurderingar kan også ha gjort at elevane svara alternativ B. Det kan vere utfordrande å formulere fleirvalsoppgåver når elevane skal gjere estimat for å kome fram til svaret. Dersom det skal vere eitt rett svar, må dei andre svara vere langt frå det som er meint å vere rett estimat. Dette fordi svar innanfor eit ganske breitt intervall kunne ha vore fornuftige.

Ei anna utfordring når ein skal måle den matematiske kompetansen til elevane, er at prøvene ofte må innehalde relativt mange oppgåver. Dette avgrensar kor omfattande oppgåvene kan vere. Eksamensoppgåvene i figur 7 og figur 8 er forholdsvis omfattande og tidkrevjande samanlikna med for eksempel PISA-oppgåvene. Analysen vår viser at sjølv slike oppgåver ikkje nødvendigvis involverer alle delar av modelleringsprosessen. Ifølgje vår analyse involverer ikkje eksamensoppgåva i figur 7 utfordringar knytte til prematematisering, sidan all informasjon er gitt i oppgåva og elevane ikkje treng gjere forenklingar eller bestemme føresetnader. Eksamensoppgåva i figur 8 er eit eksempel på ei oppgåve som involverer prematematisering. Her er det lagt opp til at elevane sjølve må bestemme mengda vatn og temperaturen på vatnet i dusjen. For at oppgåva i figur 7 skulle involvert prematematisering, kunne ho ha vore meir open ved å utelate noko relevant informasjon, for eksempel prisar på køyretimar, bensinprisar eller kor langt ein køyrer på ei vanleg veke.

Dagens eksamensordning gir ikkje elevane moglegheit til sjølv å finne informasjon som er relevant for å svare på oppgåva. Dette gjer at oppgåvene inneheld «kunstig» mykje informasjon. Denne ordninga avgrensar også kva slags informasjon ein kan forvente at elevane skal kunne gjere forenklingar av eller bestemme føresetnader for. Kan vi for eksempel forvente at alle elevar veit kva som er normal temperatur på vatnet i dusjen? Og korleis skal ein vurdere føresetnadene elevane gjer? Er eit svar som baserer seg på 40 grader, betre enn eit som baserer seg på 60 grader? Vil alle temperaturar mellom 10 og 70 grader vere «godkjente»?

Sjølv om det kan vere utfordrande å inkludere dei første delane av modelleringsprosessen i oppgåver som skal brukast i skriftlege vurderingssituasjonar, er det likevel viktig å arbeide med slike oppgåver i undervisninga for at elevane skal utvikle heilskapleg modelleringskompetanse. Analysekategoriane i tabell 3 kan vere til hjelp for å bli bevisst på kva ein bør utsette elevane for i arbeid med desse første stega i ein modelleringsprosess. For at elevane skal få arbeide med å gjere forenklingar og bestemme føresetnader, må oppgåvene vere formulerte i ein rotete kvardagskontekst, der elevane kan ta ulike val for å kome fram til ei løysing på problemet. Dei må sjølve kunne bestemme kva som skal vere nøkkelvariablar og gjere greie for relevant informasjon. For at det skal vere rom for dette, må konteksten i oppgåva vere autentisk, slik at det er mogleg for elevane å innhente informasjon. Oppgåva i figur 12, «Trekanta mønster», har ein kontekst som ikkje er autentisk, og det vil derfor vere vanskeleg å gjere om denne oppgåva slik at elevane blir utsett for sjølv å skulle velje nøkkelvariablar og bestemme føresetnader.

Resultata av denne studien viser at forholdsvis mange PISA-oppgåver kravde at elevane måtte lage ein matematisk modell. Men i diskusjonane av analysekategoriane kom det fram at desse oppgåvene oftast var på eit lågt kognitivt nivå, for ein skulle stort sett bruke standard algoritmar og operasjonar. Om ein for eksempel ser på oppgåva «Skogareal» i figur 13, er utfordringa berre å rekne ut differansen mellom to tal for ulike land og samanlikne desse. Berre tre av oppgåvene i datamaterialet vårt kravde at elevane skulle setje opp eit generelt uttrykk. Om ein vil ta utgangspunkt i konteksten skogareal, som i oppgåva i figur 13, og utforme ei modelleringsoppgåve der elevane blir utfordra til også å gjennomføre dei første stega, kan ein for eksempel gjennomføre eit tverrfagleg prosjekt med naturfag om berekraft og utbygging. Ein kan bruke data frå Statistisk sentralbyrå om nedbygging av jordbruksareal eller stille spørsmål om utbygging av hyttefelt i myrområde. I utviklinga av den matematiske modellen må elevane sjølve innhente data og bestemme nøkkelvariablar. Dei må gjere forenklingar og bestemme føresetnader for vidare arbeid. Dersom ein bur i ein kommune der denne diskusjonen er aktuell, kan ein gjennom eit slikt prosjekt belyse samfunnsaktuell tematikk i lokalmiljøet. På den måten får elevane setje seg inn i eit naturfagleg tema og bruke matematisk modellering til grunn for argumentasjon om berekraft.

Konklusjon og implikasjonar

For å oppsummere kva elevane blir testa i når dei løyser oppgåver knytte til *å kjenne igjen og formulere* i PISA, vil vi løfte fram dette: Elevane blir oftast testa i å kjenne igjen matematiske strukturar, mønster og samanhengar, og dei blir i stor grad utfordra på å lage eller å kjenne igjen enkle matematiske modellar. Ut frå vår analyse av oppgåvene blir elevane ikkje testa i å gjere forenklingar eller i å bestemme føresetnader, og oppgåvene testar berre i liten grad evna til å finne relevant informasjon og å bestemme nøkkelvariablar. Desse resultata viser at sjølv om det i PISA-rammeverket er uttrykt at ulike oppgåver testar dei ulike stega i modelleringssyklusen, er det ikkje breidde i oppgåvene slik at alle *handlingane* innanfor å *kjenne igjen og formulere* er inkluderte i PISA-oppgåvene. Elevane blir ikkje testa i sjølve å ta avgjersler som kan føre til ulike løysingar på eit problem. Som nemnt er det viktig at elevane også blir utfordra i å takle «rotete» kvardagsproblem når dei arbeider med *matematikk for modelleringa sin del*. Vi trur at analyseskjemaet som vart utvikla knytt til PISA-oppgåver, kan vere nyttig for å bli bevisst på kva utfordringar som blir gitt i ulike modelleringsoppgåver. Resultatet frå analysane av PISA-oppgåvene viser veg på den måten at det peikar på at ein i undervisninga bør vere ekstra merksam på den første delen av modelleringsprosessen. Det låge samsvaret i vurderinga av nokre av kategoriane tyder på at det kan vere vanskeleg å skilje mellom dei, og at det kan vere nyttig for lærarar å gjere denne typen vurderingar av oppgåver saman.

Ved å passe på at elevane møter oppgåver som involverer dei utfordringane ein møter når ein skal bruke matematikk til å løyse eit problem frå det verkelege livet, vil elevane bli betre rusta til å ta i bruk matematikk utanfor klasserommet. For eksempel det å skulle rekne ut kva det kostar å ta ein dusj, som i oppgåva i figur 1, er truleg ikkje noko elevane treng å gjere i livet. Men ved å gjere det steg for steg og i fellesskap diskutere kva forenklingar dei skal gjere, og korleis dei kan hente inn data, kan dei bli merksame på kor samansett verkelegheita er, og at dei sjeldan kan kome fram til eitt fasitsvar på slike problemstillingar. Elevane erfarer då at svara etter å arbeide med matematisk modellering ofte startar med «det kjem an på, men …». Ved å arbeide med matematisk modellering får elevar også erfaring med å forhalde seg kritisk til modellar presenterte i samfunnet, som ifølgje Niss og Jensen (2002) er ein del av matematisk modelleringskompetanse, og elevane utviklar seg dermed som kritiske borgarar som kan kome med reflekterte argument i samfunnsdebattar. Det kan handle om økonomi og straumsparing, som vist i avisinnlegget i figur 1, eller oppgåver knytte til andre aktuelle problemstillingar.

Forfattarbiografiar

Ingeborg Lid Berget er tilsett som førsteamanuensis ved Høgskulen i Volda og underviser i matematikk i lærarutdanninga. Ho har doktorgrad om matematisk modellering i matematikkundervising og har tidlegare arbeidd som lærar i den vidaregåande skulen. Berget har vore med som gjesteredaktør for eit spesialnummer om matematisk modellering i tidsskriftet *Tangenten* (2/2024).

Maria Løvgren er tilsett som seniorrådgivar ved Institutt for lærerutdanning og skoleforsking ved Universitetet i Oslo. Ho har ein mastergrad i matematikkdidaktikk og har arbeidd som lærar på ungdomsskulen og i den vidaregåande skulen. Ho har arbeidd med PISA-undersøkinga sidan 2020.

Andreas Pettersen er forskar ved Institutt for lærerutdanning og skoleforsking ved Universitetet i Oslo. Han har ein doktorgrad i matematikkdidaktikk og har arbeidd med PISA-undersøkinga sidan 2017. Pettersen har gitt ut fleire artiklar om matematikkdidaktikk og vore redaktør for boka *Equity, Equality and Diversity in the Nordic Model of Education* (gjeven ut på Springer i 2020).

Referansar

Berget, I. K. L. (2022). Mathematical modelling in textbook tasks and national examination in Norwegian upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *27*(1), 51–70.

Berget, I. K. L. & Bolstad, O. H. (2019). Perspektiv på matematisk modellering i Kunnskapsløftet og Fagfornyinga. *Nordisk tidsskrift for utdanning og praksis*, *13*(1), 83–97. https://doi.org/10.23865/up.v13.1882

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *22*(3), 123–139. https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? I S. J. Cho (Red.), *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 73–96). Springer.

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*, 45–58.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (s. 222–231). Horwood.

Boaler, J. (2001). Mathematical modelling and new theories of learning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *20*(3), 121–128. https://doi.org/10.1093/teamat/20.3.121

Bolstad, O. H. (2020). *Teaching and learning for mathematical literacy* [Doktorgradsavhandling, Universitetet i Agder]. AURA. https://hdl.handle.net/11250/3072702

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer International Publishing AG.

Cohen, J. (1960). A coefficient of agreement for nominal scales. *Educational and Psychological Measurement*, *20*(1), 37–46. https://doi.org/10.1177/001316446002000104

Frejd, P. (2011). An investigation of mathematical modelling in the Swedish national course tests in mathematics. I M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Red.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (s. 947–956). University of Rzeszów.

Frejd, P. & Ärlebäck, J. B. (2011). First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. I G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Red.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling ICTMA 14* (s. 407–416). Springer.

Gatabi, A. R., Stacey, K. & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(4), 403–421. https://doi.org/10.1007/s13394-012-0052-5

Gjone, G. (1996). *Matematikkhistorie i miniatyr*. Caspar forlag.

Jankvist, U. T. & Niss, M. (2020). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 467–496. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530

Jensen, T. H. (2007). Assessing mathematical modelling competency. *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*, 141–148. https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.141

Jessen, B. E. & Kjeldsen, T. H. (2021). Mathematical modelling in scientific contexts and in Danish upper secondary education: Are there any relations? *Quadrante*, *30*(2), 37–57. https://doi.org/10.48489/quadrante.23658

Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. I S. Lerman (Red.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (s. 553–561). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kunnskapsdepartementet. (2019). *Læreplan i matematikk 1.–10. trinn (MAT01-05)*. Fastsett som forskrift. Læreplanverket for Kunnskapsløftet 2020. https://www.udir.no/lk20/mat01-05

Kyrkje- og undervisningsdepartementet. (1987). *Mønsterplan for grunnskolen, M87*. Aschehoug.

Landis, J. R. & Koch, G. G. (1977). The measurement of observer agreement for categorical data. *Biometrics*, 159–174.

Lesh, R. A. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. I F. Lester (Red.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–802). Information Age Publishing.

Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315189314S

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. I P. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Red.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (s. 3–32). Springer.

Niss, M. & Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring*. Undervisningsministeriets forlag.

O'Connor, C. & Joffe, H. (2020). Intercoder reliability in qualitative research: Debates and practical guidelines. *International Journal of Qualitative Methods*. https://doi.org/10.1177/1609406919899220

OECD. (2004). *The PISA 2003 assessment framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264101739-en
OECD. (2013). *Assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/9789264190511-en
OECD. (2023a). *PISA 2022 Assessment and analytical framework*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en
OECD. (2023b). *PISA 2022 results (Volume I). The state of learning and equity in education*. https://doi.org/10.1787/53f23881-en
Plath, J. & Leiss, D. (2018). The impact of linguistic complexity on the solution of mathematical modelling tasks. *ZDM*, *50*(1), 159–171. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0897-x
Senneset, M. K. & Pettersen, A. (2024). Hvordan argumenterer norske elever i matematikk? En analyse av 15-åringers besvarelser på tre oppgaver fra PISA 2022. I A. Pettersen & F. Jensen (Red.), *Matematisk kompetanse. I dybden på resultater fra PISA 2022* (s. 111–138). Cappelen Damm Akademisk. https://doi.org/10.23865/cdf.222.ch5
Stillman, G. A. (2015). Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt? I S. J. Cho (Red.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (s. 791–805). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_44
Urhan, S. & Dost, S. (2018). Analysis of ninth grade mathematics course book activities based on model-eliciting principles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*, 985–1002. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9808-4
Utdanningsdirektoratet. (2023, 22. mai). *Eksamen MAT0015 Matematikk Del 2*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/
Utdanningsdirektoratet. (2024, 21. mai). *Eksamen Del 2 MAT0015 Matematikk*. Utdanningsdirektoratet. https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/
Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M. & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(3), 555–584. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1317